

Rotor–Stator–Kontakt in polygonförmigen Fanglagern

Von der Gemeinsamen Fakultät für Maschinenbau und Elektrotechnik
der Technischen Universität Carolo–Wilhelmina zu Braunschweig

zur Erlangung der Würde
eines Doktor–Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

von
Dipl.-Ing. Ulrich Simon
aus Helmarshausen

eingereicht am:	27. November 2000
mündliche Prüfung am:	5. April 2001
Berichterstatter:	Univ.-Prof. Dr. rer. nat. E. Brommundt Univ.-Prof. Dr.-Ing. R. Markert

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand im Wesentlichen während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Technische Mechanik der Technischen Universität Braunschweig.

Herr Prof. Dr. E. Brommundt hat diese Arbeit angeregt und betreut. Ihm danke ich für seine außerordentliche Gesprächsbereitschaft, sein großes Interesse am Fortgang und Inhalt der Arbeit sowie seine zahlreichen neuen Ideen, die entscheidend zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.

Herrn Prof. Dr. R. Markert danke ich für viele wertvolle Anregungen und für die sorgfältige Begutachtung der Arbeit.

Herrn Prof. Dr. J. Glienicke danke ich für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Herr Prof. Dr. D. Ottl hat mich im Fachstudium betreut und gefördert. Ihm danke ich für sein Engagement und für unschätzbare Ratschläge. Er hat das Interesse an der Mechanik in mir geweckt.

Meine Kollegen Dr. Friedrich Hecker, Dr. Martin August, Dr. Gerald Heisig, Dr. Ralf Ahrens, Dr. Holger Kolsch, Dr. Michael Neubert, Dr. Martin Meywerk, Dr. Frank Plagge, Dr. Andreas Baumgart, Carsten Römmich und Michael Küsel sowie unsere Sekretärinnen Ilse Krauskopf und Traute Gehrke standen mir stets mit Rat und Tat zur Seite. Ihnen allen gehört mein Dank für anregende Diskussionen und ein sehr angenehmes Arbeitsklima. Hauke Wittich und Stefan Homann danke ich für die große Hilfe, die sie als Studenten bei Experimenten, Simulationen und bei der Beschaffung von Literatur geleistet haben.

Ich danke der Braunschweigischen Maschinenbauanstalt AG (BMA) (dort insbesondere Herrn Matusch und Herrn Hentschel) und dem Zuckerverband Nord, die mich bei der Konstruktion des Versuchsstands in erheblichem Umfang unterstützt haben und die Fertigung übernahmen.

Meinen Eltern danke ich für die Förderung meiner Ausbildung und ihr bedingungsloses Vertrauen.

Bei Sabine und Tim bedanke ich mich für ihr Verständnis, ihre Hilfe und die große Zuneigung, auf die ich stets vertrauen durfte.

Ich danke Daniela, die mich mit Liebe und Ausdauer bei der Fertigstellung der Arbeit unterstützt hat.

Ulm, im Oktober 2000

Ulrich Simon

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Einsatzgebiete von Fanglagern	2
1.2	Fanglager–Bauformen	4
1.3	Gefürchtetes Phänomen bei runden Fanglagern: Der <i>Backward Whirl</i>	6
1.4	Stand der Forschung	7
1.5	Ziel und Inhalt dieser Arbeit	17
2	Modelle und Bewegungsgleichungen	19
2.1	Kontaktmodell für polygonförmige Fanglager	19
2.1.1	Kontaktkinematik	19
2.1.2	Kontaktkräfte und Kennlinien	24
2.2	Kontaktmodell für runde Fanglager	29
2.2.1	Reines Abrollen bei starr aufgehängtem Fanglager	30
2.2.2	Rollreibung	31
2.2.3	Kontaktkinematik	32
2.2.4	Kontaktkräfte	34
2.3	Kontaktmodell mit finiten Elementen	36
2.4	Bewegungsgleichung des Fanglagers	42
2.5	Bewegungsgleichung des Laval–Rotors	43
2.6	Bewegungsgleichung des Pendelrotors	47
2.7	Bewegungsgleichung des Gesamtsystems	50
3	Numerisches Lösen der Bewegungsgleichung	53
3.1	Integration des Anfangswertproblems	54
3.2	Schießverfahren zum Auffinden periodischer Lösungen	55
3.3	Realisierung und Ablauf der Simulationsprogramme	59
3.4	Wahl der Systemparameter	61

4	Numerische Ergebnisse zum Laval–Rotor	62
4.1	Bewegungen ohne Fanglagerkontakt	62
4.2	Periodische Bewegungen in starr aufgehängten Fanglagern	64
4.2.1	Fanglager in Form regelmäßiger Polygone	65
4.2.2	Runde Fanglager	67
4.2.3	Einfluss der Anzahl der Fangflächen	69
4.2.4	Einfluss der Drehzahl	70
4.2.5	Einfluss von Reibung und Kontaktdämpfung	72
4.2.6	Einfluss der Kontaktsteifigkeit	74
4.2.7	Einfluss von Unwucht	76
4.2.8	Fanglager in Form unregelmäßiger Polygone	79
4.2.9	Einfluss des Fanglagerspiels	80
4.2.10	Einfluss der Anfangsbedingungen	81
4.3	Periodische Bewegungen bei elastisch aufgehängten Fanglagern	82
4.3.1	Polygonförmige Fanglager	82
4.3.2	Runde Fanglager	86
4.3.3	Einfluss von Fanglagermasse und –Aufhängung	88
4.4	Resonanzdurchfahrt bei verschiedenen Fanglagern	90
4.4.1	Polygonförmige Fanglager	91
4.4.2	Runde Fanglager	91
5	Numerische Ergebnisse zum Pendelrotor	94
5.1	Bewegungen ohne Fanglagerkontakt	94
5.2	Periodische Bewegungen bei verschiedenen Fanglagern	95
5.2.1	Polygonförmige Fanglager	95
5.2.2	Runde Fanglager	96
5.2.3	Kurvenkreisel	97
5.3	Chaotische Bewegungen bei polygonförmigen Fanglagern	98
6	Messungen am Versuchsstand	103
6.1	Der Versuchsstand	104
6.2	Messtechnik	104
6.2.1	Messung der Rotorposition	105
6.2.2	Messung der Fanglagerposition	106
6.2.3	Messung der Drehzahl	106
6.2.4	Signalfluss und Signalverarbeitung	107
6.3	Messungen von Kennlinien und Systemparametern	107

6.3.1	Normalkraft–Kennlinie	108
6.3.2	Reibzahl–Kennlinie	108
6.3.3	Ausschwingversuche	109
6.4	Messungen am Laval–Rotor	110
6.4.1	Periodische Bewegungen bei verschiedenen Fanglagern	110
6.4.2	Resonanzdurchfahrt bei verschiedenen Fanglagern	115
6.5	Messungen am Pendelrotor	119
7	Zusammenfassung	121
A	Bewegungsgleichung des Pendelrotors	123
A.1	Drehmatrizen und Basiswechsel	123
A.2	Aufbau und Anordnung von Pendelrotor und Kardangelenke	124
A.3	Winkelgeschwindigkeit des Rotors	126
A.4	Drallsatz bezüglich des bewegten Führungspunkts	127
A.5	Linearisieren der Bewegungsgleichungen	130
A.6	Transformieren der Bewegungsgleichungen	131
A.7	Vereinfachen und Anpassen der Bewegungsgleichungen	132
B	Zum reibungsbehafteten Stoß	135
C	Systemparameter	137
	Literaturverzeichnis	141

Kapitel 1

Einleitung

Fanglager werden in Rotormaschinen eingesetzt, um in Notfallsituationen oder bei Resonanzdurchfahrten die radialen Auslenkungen des Rotors zu begrenzen. Ein Spalt zwischen Rotor und Fanglager ist so bemessen, dass der Rotor bei normalen Betriebszuständen das Fanglager nicht berührt.

Gebräuchliche Fanglager sind rund, d.h. sie umschließen den runden Rotor an der Lagerstelle mit einer zylindrischen Fangfläche (siehe Bild 1.1-a). Im einfachsten Fall sind Fanglager starr gelagert und ungeschmiert. Bei aufwendigeren Konstruktionen werden sie nachgiebig aufgehängt oder auch mit Wälzlagern ausgestattet, um die beim Kontakt entstehenden Kräfte in Umfangsrichtung zu reduzieren.

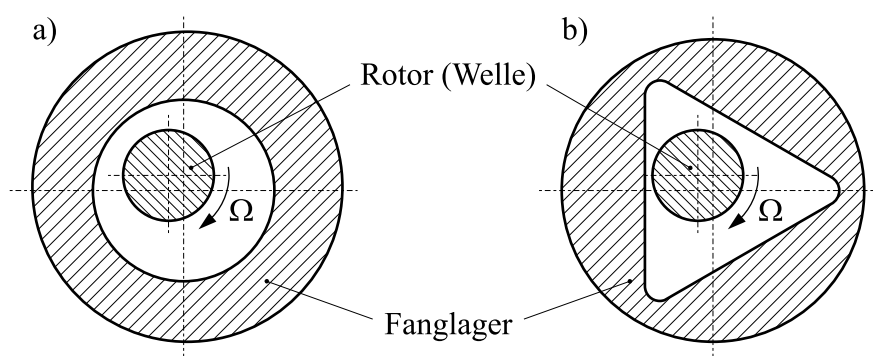


Bild 1.1: a) Herkömmliches, rundes Fanglager. b) Dreiseitiges Fanglager.

Kräfte in Umfangsrichtung zwischen Welle und Fanglager können gefährliche Bewegungen anfachen, bei denen der Wellenmittelpunkt entgegen der Rotordrehrichtung mit hoher Geschwindigkeit im Fanglager umläuft. Große umlaufende Lagerkräfte sind die Folge.

Aus der Industrie kam der Hinweis¹, dass dort die Verwendung eines *dreiseitigen* anstelle eines runden Fanglagers diese gefährlichen Bewegungen erfolgreich verhindern konnte, die bei einigen Maschinen durch den Fanglagerkontakt entstanden waren. Hier handelte es sich lediglich um Erfahrungen mit einigen einzelnen Maschinen. Die genaue Wirkungsweise, sowie allgemeingültige Konstruktionsregeln waren nicht bekannt.

In der Industrie wurde ein Fanglager in Form eines gleichseitigen Dreiecks verwendet, bei dem drei gleiche, ebene Fangflächen den Rotor umschließen (siehe Bild 1.1-b). Allgemein bezeichnen wir ein m -seitiges Fanglager, das aus m ebenen, nicht notwendig gleich großen Fangflächen besteht, als *polygonförmiges Fanglager*. Diese sind Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Obwohl polygonförmige Fanglager, wie wir zeigen werden, Vorteile bieten, ist ihre Verwendung bis heute nahezu unbekannt. Die Bewegung der Rotoren beim Kontakt mit polygonförmigen Fanglagern blieb weitgehend unerforscht.

1.1 Einsatzgebiete von Fanglagern

Fanglager (FL) dienen als Not- oder Hilfslager². Grundsätzlich sollen sie die radialen Auslenkungen von Rotoren gegenüber dem Stator begrenzen, bevor ein kritischer Ausschlag erreicht wird.

Bei der Verwendung eines Fanglagers als Notlager führen ungeplante Ereignisse zum Rotor–Fanglager–Kontakt. Beim Einsatz als Resonanzdurchlaufhilfe dagegen kommt es beim Hochfahren und Auslaufen des Rotors regelmäßig zum Kontakt zwischen Rotor und Fanglager.

Fanglager als Notlager für ungeplante, kritische Ereignisse

Es ist bekannt, dass die folgenden, plötzlich oder allmählich auftretenden Ereignisse zu kritischen Betriebszuständen in rotierenden Maschinen führen können:

- Erzwungene Schwingungen durch unerwartet hohe Unwuchten (abgebrochene oder abgeschliffene Rotorteile, Ablagerungen am Rotor).

¹Persönliche Mitteilung von Herrn Siegfried Matusch, Braunschweigische Maschinenbauanstalt AG (BMA).

² Übliche englischsprachige Begriffe sind: *retainer bearing* und *auxiliary bearing* (für Resonanzdurchlaufhilfen), *emergency bearing* (für Notlager), *backup bearing* und *touchdown bearing* (für Notlager bei Magnetlagern).

- Anfachung von selbsterregten Schwingungen z.B. durch Dämpfung in rotierenden Maschinenelementen oder durch mitrotierende Flüssigkeiten (vgl. RIEDEL (1992), [68]).
- Instabile Betriebszustände z.B. durch mitrotierende Teile, die sich vom Rotor oder vom Stator gelöst haben (vgl. MUSZYŃSKA (1985), [58]).
- Parametererregte Schwingungen z.B. durch angebrochene Wellen.
- Transiente Vorgänge wie Stöße, ungleichmäßige Erwärmung, Überlast, oder Ausfall eines Magnetlagers.

Fanglager helfen, beim Auftreten dieser Ereignisse Schäden zu verhindern oder zumindest zu vermindern, bis eine Notbremsung den Rotor zum Stillstand gebracht hat. Ein unabwendbarer Rotor–Stator–Kontakt wird von besonders empfindlichen Maschinenteilen (Schaufelrädern, Labyrinthdichtungen) ferngehalten und auf eine dafür vorgesehene Stelle, das Fanglager, gelenkt.

Die Fanglager müssen in diesem Verwendungsfall als Notlager keine besonderen Anforderungen hinsichtlich der Laufruhe oder Abriebfestigkeit erfüllen. Es ist u.U. ausreichend, wenn das Fanglager seine Aufgabe lediglich einmal erfüllen kann.

Fanglager als Resonanzdurchlaufhilfen

Schnelllaufende, insbesondere langgestreckte Rotoren werden oft mit überkritischen Drehzahlen betrieben. Dabei wählt man Betriebsdrehzahlen, die in hinreichender Entfernung von bekannten kritischen Drehzahlen liegen. Die Vorteile eines überkritischen Betriebs sind eine leichte, materialsparende Bauweise und eine Selbstzentrierung des Rotors. Umlaufende Lagerkräfte aus Restunwuchten oder Fluchtungsfehlern werden vermindert.

Eine größere Nachgiebigkeit macht die Maschine jedoch anfälliger gegenüber Störeinflüssen. Zudem müssen beim An- und Auslauf des Rotors meistens mehrere kritische Drehzahlen durchfahren werden.

Hier kommen Fanglager als *passive* Durchlaufhilfen zum Einsatz. Bei kritischen Auslenkungen führt der Kontakt zur Ankoppelung von Steifigkeiten, Dämpfungen und Massen an den Rotor. Das Schwingungsverhalten wird günstig beeinflusst, die radialen Auslenkungen bleiben beschränkt. Der Kontakt mit einem Fanglager, dessen Aufhängung als starr gilt, kann als Ankopplung einer (großen) Steifigkeit aufgefasst werden. Bei anderen Konstruktionen sind die Fanglager selbst elastisch aufgehängt. Im Kontaktfall wird dann zusätzlich eine Masse an den Rotor angekoppelt.

Fanglager als passive Durchlaufhilfen müssen höheren Anforderungen als die Notlager genügen:

- Die Bremsmomente vom Fanglager auf den Rotor müssen so klein bleiben, dass ein sicheres und schnelles Durchfahren der kritischen Drehzahlen gelingt.
- Da der Fanglagerkontakt hier zum normalen Betriebsablauf gehört, müssen Stöße, Abrieb und Kontaktkräfte möglichst klein bleiben.
- Nach Durchfahren der kritischen Drehzahlen sollen sich Rotor und Fanglager wieder voneinander lösen.

1.2 Fanglager–Bauformen

Eine systematische Einteilung der Fanglager nach der Bauform soll verdeutlichen, wie sich die polygonförmigen Fanglager gegenüber anderen Bauformen einordnen und abgrenzen lassen (siehe Bild 1.2).

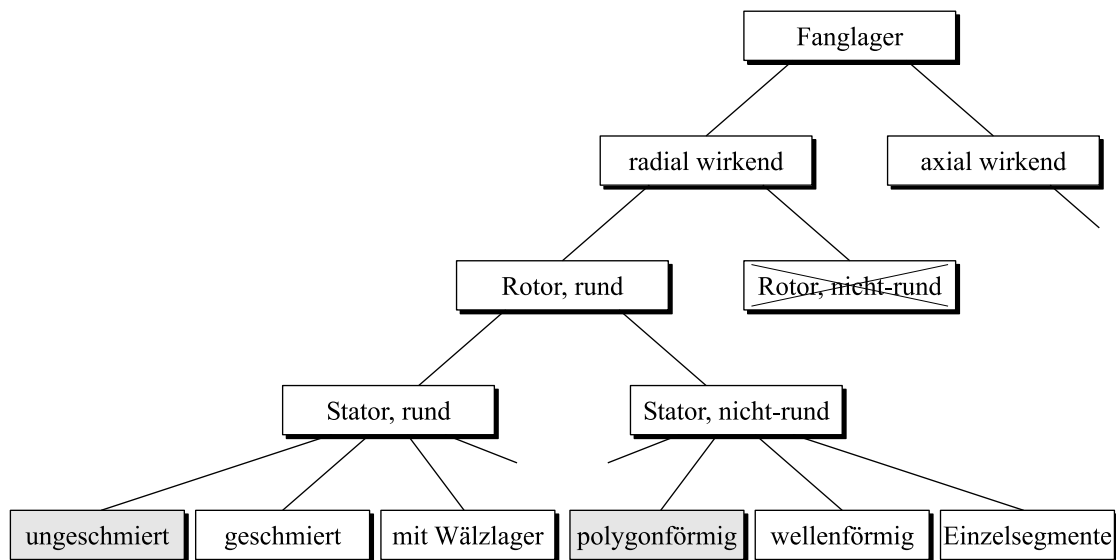


Bild 1.2: Gliederung der Fanglager–Bauformen.

In der ersten Einteilungsstufe unterscheiden wir nach der Wirkrichtung des Fanglagers. **Axial wirkende** Fanglager kommen z.B. als Notlager für axial wirkende Magnetlager (vgl. HEIL (1993), [26]) zum Einsatz. Bei diesem Lagertyp kann die Reibung beim Fanglagerkontakt zusammen mit einem Kippen des Rotors zu selbsterregten Schwingungen führen (DEN HARTOG (1956), [12]). Die axial wirkenden Fanglager werden in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet.

Radial wirkende Fanglager werden weiter nach der Form der Fangflächen von Rotor und Stator unterschieden. **Nicht–runde Rotor–Kontaktflächen** erscheinen ungeeignet,

da sie beim Kontakt im Allgemeinen zu Drehstößen führen. Solche Konstruktionen sind uns nicht bekannt.

Bei üblichen Konstruktionen trifft eine **runde Rotor–Kontaktflächen** auf eine **runde Stator–Kontaktflächen**. Wir treffen eine weitere Einteilung in *geschmierte*, *ungeschmierte* und *mit Wälzlagern* ausgestattete Fanglager. Bei **geschmierten** oder in Öl laufenden Fanglagern müssen bei der Modellierung des Kontakts hydrodynamische Effekte berücksichtigt werden. Ist eine Schmierung nicht möglich (Lebensmittelindustrie) oder zu aufwendig, kommen **ungeschmierte** Fanglager zum Einsatz.

Mit Wälzlagern bestückte Fanglager besitzen bessere Laufeigenschaften und sollen durch geringere Umfangskräfte die Anfachung von selbsterregten Schwingungen verhindern. Typisches Einsatzgebiet sind regelmäßig wirkende Resonanzdurchlaufhilfen und Notlager für magnetgelagerte Rotoren in der Raumfahrt, Reaktor- und Verfahrenstechnik, bei denen eine sehr gute Notlaufeigenschaft gefordert wird (vgl. HEIL (1993), [26]). Die Wälzlager sind in der Regel im Gehäuse fest gepasst und weisen das Fanglagerspiel zwischen Welle und Wälzlager–Innenring auf. Das Fanglager wird wirksam, wenn die Welle auf den Innenring stößt, der dann durch Umfangskräfte beschleunigt wird. Ein auf der Welle gepasstes Wälzlager würde die Nachteile besitzen, dass es die Rotormasse erhöht und das Wälzlagerschmiermittel hohen Fliehkräften aussetzt.

In der Gruppe der Fanglager mit **nicht–runder Stator–Kontaktfläche** sind viele verschiedene Formen denkbar. Diese Arbeit beschäftigt sich mit **polygonförmigen Fanglagern**. Aus der Zuckerindustrie ist uns eine Rotormaschine³ bekannt, die mit einem gleichseitigen, dreieckigen Fanglager ausgestattet ist. Bei den Gleitlagern sind **wellenförmige** (DIMOFTE (1997), [13]), **zitronenförmige** und andere nicht–runde Schalenformen (MUSZYŃSKA (1972), [55], Seite 93) bekannt, die man auf die Fanglager übertragen könnte. Fanglager aus **Einzelsegmenten** bieten sich an, wenn ein Rotor nicht an einer vergleichsweise dünnen Welle, sondern auf einem großen Durchmesser gefangen werden muss. Die Verhältnisse in einem Fanglager aus m Segmenten sind ähnlich zu denen in einem m –seitigen polygonförmigen Fanglager.

Alle Fanglager mit nicht–runder Stator–Kontaktfläche besitzen den Nachteil eines über den Umfang ungleichmäßigen Spiels. In der Regel sollen ja die radialen Auslenkungen in allen Richtungen auf das gleiche Maß beschränkt werden. Außerdem ist die Fertigung in der Regel aufwendiger als bei runden Fanglagern.

Unabhängig von der Form können alle Stator–Kontaktflächen entweder sehr steif oder aber nachgiebig mit dem Maschinengehäuse verbunden sein. Einzel–Segmente können auch

³ Vertikaler Rotor (Länge ca. 16 m) mit Rührarmen, oben fliegend, unten mit dreiseitigem Fanglager (Wellendurchmesser 200 mm, Fanglagerspalt 20 mm) gelagert; Braunschweigische Maschinenbauanstalt AG (BMA).

einzelnen nachgiebig oder beweglich aufgehängt werden.

Ein Rotor kann mit mehreren, auch unterschiedlichen Fanglagern ausgerüstet werden. Für die Auslegung oder Analyse der Bewegung muss stets das Gesamtsystem betrachtet werden. Bei nicht-runden Fanglagern kommt es dabei auch auf die Stellung der Fanglager zueinander an.

Eine Hohlwelle oder ein sonst hohler Rotor kann an seiner zylindrischen Innenfläche mit einem vom Ende hineinragenden Stator gefangen werden. In diesem Fall ist es ebenfalls möglich, eine nicht-runde Stator-Kontaktfläche zu verwenden. Aus der Industrie ist uns eine Rotormaschine⁴ bekannt, bei der eine Hohlwelle von einem feststehenden, dreikantigen Zapfen gefangen wird.

Weitere Variationen der Fanglager-Bauformen sind denkbar; einige Vorschläge findet man z.B. in einer Patentschrift von ZIPPE und MEINKE (1983), [93].

Die vorliegende Arbeit untersucht polygonförmige Fanglager und vergleicht sie mit herkömmlichen ungeschmierten, runden Fanglagern.

1.3 Gefürchtetes Phänomen bei runden Fanglagern: *Der Backward Whirl*

Ein gefürchtetes Phänomen beim Kontakt eines Rotors mit einem runden Fanglager ist der so genannte *backward whirl*⁵. Bei dieser Bewegung bleiben Rotor und Fanglager ständig in Kontakt (*full annular rub* statt *partial rub*). Der Rotor rollt mit mehr oder weniger Schlupf auf der Anschlagfläche des Fanglagers ab. Der Wellenmittelpunkt beschreibt eine kreisförmige Bahn (Orbit) entgegen der Drehrichtung der Welle. Hohe Geschwindigkeiten mit großen umlaufenden Kräften, hohe Bremsmomente und Abrieb sind die Folge (vgl. Abschnitt 2.2.1).

Wird die Drehzahl konstant gehalten, kann sich eine stationäre, periodische Bewegung einstellen. Bei dieser selbsterregten Schwingung halten sich die über eine Periode zugeführte und die dissipierte Energie die Waage. Die Umfangskraft aus Reibung oder Haftung im Kontakt ist der Mechanismus, der Energie von der Rotation des Rotors in die Schwingbewegung leitet. Dämpfung, die im Kontakt und an anderen Stellen auftritt, entzieht der

⁴ Rührwerk mit vertikaler Achse, nur oben fest gelagert, unten mit dreiseitigem Hohlwellen-Fanglager ausgestattet; Braunschweigische Maschinenbauanstalt AG (BMA).

⁵Es hat sich hier kein deutscher Begriff entwickelt, wir werden den englischen Begriff *backward whirl* verwenden, der in englischen und deutschen Arbeiten stark verbreitet ist. Weitere englische Begriffe sind *reverse whirl*, *full reverse precession rub*, *dry friction whip*, *dry friction counterwhirl*, *dry friction whip* und *invers precession*.

Schwingung Energie.

DEN HARTOG (1956), [12] sowie EHRICH (1988), [17] beschreiben qualitativ die Entstehung selbsterregter Wellenschwingungen (*backward whirl*) als Folge trockener Reibung beim Rotor–Stator–Kontakt.

GAO und MIN (1985), [21] berichten über eine heftige, gegenläufige Rotorbewegung eines Zentrifugalkompressor mit permanentem Rotor–Stator–Kontakt (*full reverse precession rub*).

MUSZYŃSKA (1989), [60] bezeichnet den *backward whirl* als das wichtigste durch den reibungsbehafteten Rotor–Stator–Kontakt verursachte Schwingungsproblem: „The most important is the self-excited backward precession of the shaft, known as 'dry whip'.“

ROSENBLUM (1995), [69] berichtet von einem 600-MW-Generator, der durch *backward whirl* in einem Fanglager vollständig zerstört wurde.

Das Phänomen des *backward whirl* tritt nicht nur beim Kontakt mit runden Fanglagern, sondern allgemein beim reibungsbehafteten Kontakt von Rotorteilen mit runden Stator-teilen wie Spaltdichtungen, runden Gehäuseteilen oder trockenen, spielbehafteten Gleitlagern auf. Beim unerwünschten Kreischen von kleinen Elektromotoren mit ausgeschlagenen Kunststofflagern bei hohen Drehzahlen und geringer Last handelt es sich um einen solchen Fall.

1.4 Stand der Forschung

Zahlreiche Arbeiten aus jüngerer Zeit beschäftigen sich mit dem Rotor–Stator–Kontakt. Bis auf wenige Ausnahmen wird der Kontakt zu *runden* Statorteilen untersucht. Den Anlass für die Untersuchungen lieferten nicht selten gefährliche Betriebszustände, die bei Rotormaschinen nach einem Rotor–Stator–Kontakt beobachtet worden waren.

Wir stellen einige Arbeiten vor, die wir folgenden Gebieten zuordnen:

- Übersichten
- Arbeiten zum Kontakt des Rotors mit runden Statorteilen
- Arbeiten zu spielbehafteten Gleitlagern
- Arbeiten mit Berücksichtigung thermischer Effekte
- Arbeiten zum Kontakt des Rotors mit nicht–runden Statorteilen

Übersichten

MUSZYŃSKA (1972), [55] bietet eine Übersicht und Einteilung von 765 Literaturstellen zur

Rotordynamik, auch mit zahlreichen osteuropäischen Zitaten. Bis zu diesem Zeitpunkt sind nur wenige Arbeiten zum Rotor–Stator–Kontakt erschienen. Sie sind in dieser Übersicht enthalten.

MUSZYŃSKA (1989), [60] gibt eine Literaturübersicht über Arbeiten zum reibungsbehafteten Rotor–Stator–Kontakt. Die Arbeiten werden nach den Phänomenen (trockene Reibung, lokale Erwärmung, Stoß u.a.) eingeteilt, die beim Kontakt auftreten bzw. in Modellen berücksichtigt werden und zu Schwingungen führen.

TONDL und SPRINGER (1995), [82] stellen in einer Übersicht beobachtete Rotorschwingungen mit typischen Merkmalen deren möglichen Ursachen gegenüber. Schwingungsformen, die auf einen reibungsbehafteten Rotor–Stator–Kontakt zurückgeführt werden können, sind ebenfalls enthalten.

Arbeiten zum Kontakt des Rotors mit runden Statorteilen

Die weitaus meisten Arbeiten zum Rotor–Stator–Kontakt gehen von einem *runden* Fanglager bzw. Statorteil aus, an das der Rotor anschlägt. Hier spiegelt sich die Tatsache wider, dass dies der in der Technik übliche Fall ist.

DEN HARTOG (1956), [12] beschreibt qualitativ die Entstehung selbsterregter Wellenschwingungen (*shaft whipping*) als Folge von reibungsbehafteten Rotor–Stator–Kontakten. Weiter beschreibt er einen Fall, bei dem ein Wellenbund in axialer Richtung an ein axial wirkendes Fanglager streift und dadurch selbsterregte Schwingungen anfacht.

JOHNSON (1962), [35] untersucht theoretisch eine unwuchtbehaftete Welle in drei fluchtenden Lagern. Das mittlere Lager ist spielbehaftet. Wie bei einem Fanglager, kommt es nur bei radialen Auslenkungen der Welle zum Kontakt mit diesem Lager. Der Kontakt wird reibungsfrei angenommen. Er berechnet analytisch Resonanzkurven mit Sprungphänomenen für drehzahlsynchrone Schwingungen unter der Annahme von entweder keinem oder permanentem, stationärem Kontakt.

EHRICH (1969), [16] untersucht theoretisch die Stabilität von *backward whirl* mit unterschiedlichen Umlauffrequenzen. In dem ebenen Rotormodell mit elastisch aufgehängtem Fanglager wird der Kontakt permanent, stationär und reibungsbehaftet formuliert. Experimente an einem vertikalen, nur oben gelagerten Rotor, bei dem eine Rotorscheibe in einem Fanglager–Topf anschlagen kann, bestätigen diese Ergebnisse tendenziell.

OLIMPIYEV (1976), [66]: Für einen unwuchtbehafteten Laval–Rotor mit konstanter Drehzahl in zwei spielbehafteten Lagern und permanentem, reibungsbehaftetem Kontakt zu einem starr aufgehängten Stator untersucht er analytisch die Existenz und Stabilität drehzahlsynchroner und -asynchroner, gleich- oder gegenläufiger Rotorbewegungen. Es existieren zwei stabile Lösungen, eine gleichläufige, drehzahlsynchrone Bewegung (*forward whirl*)

und eine gegenläufige, asynchrone Bewegung (*backward whirl*). Tritt innere Dämpfung in der Welle hinzu, so wird eine dritte Lösung stabil, eine gegenläufige Orbitbewegung, langsamer als die erste gegenläufige Bewegung, mit einer sich periodisch ändernden Umlaufgeschwindigkeit.

ZIPPE und MEINKE (1983), [93] beschreiben verschiedene passive und aktive Resonanzdurchlaufhilfen in einer 1976 angemeldeten Patentschrift. Es werden u.a. Konstruktionen geschützt, bei denen ein oder mehrere Fanglager als Resonanzdurchlaufhilfe für langgestreckte Rotoren dienen. Die Fanglager können mit Wälzlager oder Wälzkörpern bestückt und elastisch aufgehängt sein. Konische Fanglager ändern bei axialer Verschiebung ihr Spiel. Die geschützten Verfahren sind dadurch gekennzeichnet, dass die wachsenden, radialen Auslenkungen des Rotors bei Annäherung an einen kritischen Wert ohne aufwendige Steuerung zum Anlegen an die Durchlaufhilfen führen.

EDBAUER, MEINKE, MÜLLER und WAUER (1982), [15] untersuchen Fanglager als passive Resonanzdurchlaufhilfen am Laval-Rotor. Der Kontakt wird reibungsfrei und mit einer nichtlinearen Kennlinie (stückweise linear) modelliert. Unter den Annahmen von entweder gar keinem oder permanentem, stationärem Kontakt bei konstanter Drehzahl berechnen sie die Rotoramplituden für einen drehsynchronen Lösungsansatz. Stöße sind dann ausgeschlossen. Transiente Resonanzdurchläufe werden mit einem numerischen Verfahren simuliert. Parametereinflüsse auf die maximalen Rotorauslenkungen werden diskutiert.

MUSZYŃSKA (1985), [57] sowie GRISSOM (1985), [23] präsentieren Versuchsstände u.a. zur Demonstration von reibungsbehaftetem Rotor-Stator-Kontakt. Eine Frequenzanalyse der gemessenen Orbits gibt Hinweise auf die Ausprägung des Kontakts. So deuten beispielsweise große Anteile von hohen Frequenzen im Spektrum auf Stöße hin.

CHOY und PADOVAN (1987), [11] simulieren mit einem ebenen, nichtlinearen Rechenmodell transiente Vorgänge beim Anstreifen eines unwuchtbehafteten Rotors in einem nachgiebig aufgehängten, masselosen Fanglager. Der Kontakt wird als einseitige kinematische Bindung und mit Coulombscher Reibung beschrieben. Für verschiedene Parametersätze werden Zeitverläufe und Orbitfiguren berechnet.

ABRAHAM, MARKERT und WITFELD (1988), [1] untersuchen theoretisch und experimentell aktive und passive Resonanzdurchlaufhilfen am Laval-Rotor. Als passive Durchlaufhilfe wird ein elastisch aufgehängtes, massebehaftetes Fanglager mit Wälzlager betrachtet. Der Kontakt wird reibungsfrei und rein kinematisch (ohne Nachgiebigkeit) modelliert. Wie bei EDBAUER u.a. (1982), [15] wird ein quasi-stationärer Resonanzdurchlauf mit einem drehsynchronen Lösungsansatz bestimmt. Dazu muss ein stoß- und prellfreier Übergang von der kontaktfreien Rotorbewegung zum stationären Kontakt bei konstanter Drehzahl angenommen werden. Nur drehsynchrone Lösungen sind enthalten. Parametereinflüsse auf den Amplitudenverlauf bei Resonanzdurchgang werden rechnerisch ermittelt. Ihre

experimentellen Ergebnisse legen den Schluss nahe, dass die Wirkung der Dämpfung in ihrem Modell bei stationärem Fanglagerkontakt unterschätzt wurde. Der Rotor kann sich im Experiment leichter als prognostiziert vom Fanglager lösen. Wir merken dazu an, dass das Modell keine Kontaktdämpfung oder Rollreibungseffekte enthält.

MARKERT und WEGENER (1995), [51] erweitern das Modell aus [1]. Der Kontakt wird mit einer linearen Normalkraft–Kennlinie und Coulombscher Reibung formuliert. Mit der Lösungsmethode aus [1] werden quasistationäre Resonanzdurchläufe berechnet. Weiter zeigen sie in dieser Arbeit und in [52] Amplitudengänge für instationäre Resonanzdurchfahrten. Mit Hilfe numerischer Integration können auch Stoß- und Prellvorgänge beim Anlegen und Ablösen des Rotors vom Fanglager simuliert werden.

YANG, TANG und HOGAT (1997), [91] entwickeln ein ebenes Modell für den Kontakt eines Rotors mit einem elastisch aufgehängten Fanglager bei konstanter Drehzahl. Der Kontakt wird als starre, einseitige Bindung und mit Coulombscher Reibung beschrieben. Durch numerische Integration werden Zeitverläufe und Bahnkurven berechnet. Abhängig von der Drehzahl finden sie Bereiche mit periodischen oder Bereiche mit unregelmäßigen (chaotischen) Bewegungen. Der Übergang zwischen den Bereichen ist durch Bifurkationen mit Perioden–Verdopplung gekennzeichnet.

ISAKSSON (1997), [33] entwickelt Modelle für drei verschiedene Rotoren (Laval–Rotor, Zwei–Scheiben–Rotor, Finite–Elemente–Modell eines elastischen Rotors) mit einem elastisch aufgehängten, masselosen Fanglager. Der Kontakt umfasst Coulombsche Reibung. Theoretisch wird der Einfluss verschiedener Parameter auf die Stabilität der Rotorbewegung untersucht.

JERICHA, PIRKER und LANG (1997), [34] untersuchen erzwungene Torsionsschwingungen eines Turbosatzes — bestehend aus Turbine, Getriebe und Generator — mit Hilfe eines einfachen Drei–Massen–Schwingers. Die periodische Erregung hat ihre Ursache im Anstreifen der Turbinenblätter am Gehäuse, hervorgerufen durch eine angenommene Biegeschwingung der Turbinenwelle. Liegen Biege- und Torsions–Eigenfrequenzen dicht zusammen, so besteht die Gefahr einer Instabilität durch wechselseitige Anfachung.

YANABE und BERNARD (1998), [90] entwickeln ein ebenes Modell für einen vertikalen Laval–Rotor mit einem elastisch aufgehängten Fanglager. Für den Kontakt werden eine lineare Normalkraft–Kennlinie und Coulombsche Reibung angenommen. Im Kontaktfall wird mit einem Zuschlag zu den übrigen Dämpfungskonstanten der Bewegungsgleichung näherungsweise eine Kontaktdämpfung erfasst. Der Antriebsmotor wird mit einer Drehmoment–Drehzahl–Kennlinie modelliert. Für unterschiedliche Unwuchten werden numerisch Zeitverläufe und Bahnkurven bei transienten Resonanzdurchfahrten mit folgenden Ergebnissen bestimmt: Bei geringen Unwuchten kann der Antrieb den Rotor durch die kritische Drehzahl bringen; der Rotor löst sich wieder vom Fanglager. Bei größeren Unwuchten

gelingt dies nicht mehr; *backward whirl* mit großen Amplituden und Bremsmomenten wird angefacht. Noch größere Unwucht führt zu einer gleichläufigen Orbitbewegung (*forward whirl*) mit Kontakt und großen Amplituden.

BARTHA (1998), [3] untersucht *dry friction backward whirl* theoretisch und experimentell am Laval-Rotor mit starr aufgehängtem Fanglager. Das ebene mathematische Modell beschreibt die drei Zustände *ohne Kontakt*, *Stoß* und *permanenter Kontakt* getrennt. Es ist nicht klar zu erkennen, wie die Stoßphase modelliert wurde. Abhängig von äußerer Dämpfung sowie Reibung im Kontakt werden kritische Radialgeschwindigkeiten des Rotors ermittelt, die als Anfangsbedingungen zu einem permanenten Kontakt mit dem Fanglager führen. Die berechneten Werte stimmen — zumindest in ihrer Größenordnung — mit den in Experimenten gemessenen kritischen Radialgeschwindigkeiten überein.

BACH, HILLER und MARKERT (1998), [2] entwickeln ein Verfahren zur schnellen Online-Identifikation von Störkräften, die z.B. aus einem unerwarteten Rotor-Stator-Kontakt herrühren. Das Fehlermodell, eine lineare Differentialgleichung, beschreibt die Abweichungen von der „normalen“, ungestörten Rotorbewegung als Folge der Störkräfte.

SCHMIECHEN und EWINS (1998), [70] untersuchen Instabilitäten von Turbomaschinen, die durch Anstreifen der Schaufelblätter am Gehäuse verursacht werden. Der Kontakt führt zu Partialschwingungen der Blätter, der Rotorscheibe oder gar des Gehäuses. Umlaufende Verformungswellen (sog. *traveling waves*) können im Schaufelrad oder in den betroffenen elastischen Gehäuseteilen angefacht werden. Sie beschreiben einen Versuchsstand, in dem achsparallel ausgerichtete Schaufelblätter, die auf einer *nicht-rotierenden* elastischen Scheibe montiert sind, mit ihren Köpfen auf eine rotierende, elastische Rotorscheibe stoßen. Fraglich ist, wie gut sich das von ihnen benutzte Experiment auf die Verhältnisse in einer Turbine übertragen lässt.

ECKER (1998), [14] entwickelt ein ebenes Modell für einen magnetgelagerten Rotor mit Unwucht, der in einem starr aufgehängten Fanglager, das dem Magnetlager als Notlager zugeordnet ist, anstreift. Kontakt ereignet sich ausschließlich als Stoß in unendlich kurzer Zeit. Er wird durch Stoßhypothesen mit Energieverlust entweder für haftenden oder reibenden Kontakt beschrieben. Die nichtlinearen Bewegungsgleichungen werden numerisch gelöst. Bifurkationsdiagramme zeigen, dass mit zunehmender Drehzahl zunächst periodische dann chaotische Rotorbewegungen entstehen.

MARKERT und WEGENER (1998), [53] setzen verschiedene reibungsfreie Kontaktmodelle in ihr zuvor entwickeltes ebenes Modell eines Rotors mit Fanglager [51] ein. Stoßhypothesen, lineare und nicht-lineare Kennlinien für die Kontakt-Normalkraft mit linearer oder nichtlinearer Dämpfung werden untersucht. Amplitudengänge für transiente Resonanzdurchläufe werden numerisch berechnet. Der Einfluss der Kontaktmodelle auf die Simulationsergebnisse wird diskutiert. Unterschiede werden insbesondere bei Anstreif- oder Ablösevorgängen,

weniger im globalen dynamischen Verhalten deutlich (siehe auch WEGENER und MARKERT (1999), [86]).

WEGENER, MARKERT und POTHMANN (1998), [87] ermitteln Amplitudengänge für die quasi-stationäre Resonanzdurchfahrt von Rotoren mit mehr als zwei Freiheitsgraden und einem elastisch aufgehängten Fanglager. Für den Kontakt wird Coulombsche Reibung zugelassen; Kreiseinflüsse sind nicht enthalten. Nur drehzahlsynchrone Lösungen für die Fälle *ohne Kontakt* oder *mit permanentem, stationärem Kontakt* werden betrachtet und getrennt berechnet. Mit der Lösungsmethode aus [1] werden diskrete Mehr-Scheiben-Rotoren untersucht. Elastische Rotoren mit kontinuierlich verteilten Massen werden zuvor mit Hilfe von Ansatzfunktionen diskretisiert. Für den Kontakt in einem masselosen, ungedämpften Fanglager (das entspricht einem starr aufgehängten Fanglager mit entsprechender Kontakt-Normalkraft-Kennlinie) wird ein weiteres Lösungsverfahren (*point-by-point determination*) vorgeschlagen, bei dem mehrere Resonanzantworten linearer Ersatzsysteme mit unterschiedlichen Ersatzsteifigkeiten berechnet werden. Die Ersatzsteifigkeiten können als Rotorsteifigkeit plus Fanglager-Steifigkeit interpretiert werden, wenn die radiale Auslenkung des Fanglagers bei stationärem Kontakt konstant ist. Jede einzelne Resonanzkurve gilt nur genau an den Punkten (Drehzahlen), an denen die Auslenkung erreicht wird, die mit der gewählten Ersatzsteifigkeit korrespondiert. Die Punkte der unterschiedlichen Resonanzkurven liefern zusammen die „exakte“ Resonanzkurve (siehe auch MARKERT, POTHMANN und WEGENER (1999), [50]).

WEGENER (2000), [85] untersucht in seiner Dissertation elastische Fanglager zur Amplitudenbegrenzung elastischer Rotoren. Er entwickelt Modelle für Ein- und Mehrscheibenrotoren sowie elastische Rotoren mit kontinuierlich verteilter Masse. Die runden Fanglager werden linear oder nichtlinear, teilweise gedämpft aufgehängt. Der Rotor-Fanglager-Kontakt wird mit Stoßzahlen oder auch mit Kennlinien beschrieben. Er vergleicht numerisch gewonnene Rotorbewegungen mit eigenen Versuchsergebnissen.

Arbeiten zu spielbehafteten Gleitlagern

Viele der oben vorgestellten Modelle und Ergebnisse für den Kontakt zwischen Rotor und runden Fanglagern, Dichtungen oder Gehäuseteilen sind gut auf die Bewegung einer Welle im ungeschmierten, spielbehafteten Gleitlager übertragbar. Ein grundsätzlicher Unterschied ist jedoch durch den normalen (stationären) Betriebszustand gegeben. Typischerweise sorgt beim Gleitlager eine nicht-mitdrehende, radiale Last dafür, dass die Welle in ständigem Kontakt mit dem Gleitlager steht. Auf der Gleitlagerfläche ist es in der Regel ein bestimmter, eng begrenzter Bereich, in dem sich die Kontaktstelle befindet. Bereits beim ruhenden Rotor steht die Welle anders als beim Fanglager im Kontakt mit dem Gleitlager. Bei höheren Drehzahlen kann dieser (quasi-)stationäre Zustand instabil werden. Nun ist

es nicht die Entstehung, sondern der *Verlust* des Kontakts, der u.U. einen kritischen Betriebszustand einleitet. Es kommt zu Stößen zwischen Rotor und Lager oder zum *backward whirl*. Hohe Bremsmomente, Abrieb, Schall und Schwingungen sind die Folge

BILLET (1965), [5] analysiert einen Laval-Rotor ohne Unwucht, der an beiden Enden in spielbehafteten Lagern mit trockener Reibung läuft. Zwischen der diskreten Masse des Rotors und den Kontaktstellen erstreckt sich die Nachgiebigkeit der als masselos angenommenen Welle. In den Lagerebenen bewegen sich demnach keine Massen. Die Einführung einer Kontaktsteifigkeit ist hier deshalb nicht erforderlich. Analytisch und experimentell zeigt er, dass die maximale Umlaufgeschwindigkeit des Wellenmittelpunkts in den Lagern beim *reverse whirl* (= *backward whirl*) nicht über die Biege-Eigenfrequenz des Laval-Rotors hinaus anwachsen kann. Ursache ist die verschwindende Kontaktkraft im Resonanzfall.

BLACK (1968), [6] untersucht die Existenz und Stabilität von gleichläufigen (*synchronous rotor whirl*) sowie gegenläufigen Rotorschwingungen (*dry friction counterwhirl* = *backward whirl*) analytisch und in einem Fall auch experimentell. Er betrachtet Rotoren ohne Unwucht, mit permanentem, reibungsbehaftetem Rotor-Stator-Kontakt bei konstanter Rotordrehzahl. Er zeigt, dass die Umlauffrequenz des *backward whirl* in Bereichen zwischen einer Eigenfrequenz des Rotors oder Stators und der nächsthöheren Eigenfrequenz des gekoppelten Systems liegen muss. Wird die Reibung verringert, engen sich die Bereiche möglicher Umlauffrequenzen ein. Unterhalb bestimmbarer, kritischer Reibwerte verschwinden die Bereiche; *backward whirl* ist nicht mehr möglich.

HAINES (1980), [25] untersucht theoretisch die Bedingungen, die zu Kontaktverlust und Stößen in spielbehafteten Zapfenlagern bei Kurvengetrieben führen. Reibung wird vernachlässigt.

CHILDS und MOYER (1985), [10] untersuchen gefährliche subharmonische Schwingungen am Sauerstoff-Turboverdichter des Space-shuttle-Haupttriebwerks. Ergebnisse eines Finite-Elemente-Modells deuten darauf hin, dass Nichtlinearitäten aus spielbehafteten Lagern als Ursache in Frage kommen.

MUSZYŃSKA (1993), [61] untersucht chaotische Bewegungen von Rotoren in reibungs- und spielbehafteten Lagern.

Arbeiten mit Berücksichtigung thermischer Effekte

NEWKIRK und SCHENECTADY (1926), [65] beschreiben einen durch Reibungswärme bedingten Effekt, der bei unterkritisch laufenden Maschinen zu starken Schwingungen und Instabilität führen kann. Bei diesem, später auch als *Newkirk-Effekt* bezeichneten Phänomen, kommt es zunächst durch Unwucht zu einer starken Annäherung oder gar zum sanften Kontakt zwischen einem Punkt der Welle und z.B. einer Dichtung. Reibung, Er-

wärmung und Dehnung der Welle an diesem als *hot spot* bezeichneten Punkt führen zu einer Verkrümmung der Welle. Im unterkritischen Betrieb wird dadurch die Unwucht und damit der Effekt selbst verstärkt.

KELLENBERGER (1980), [37] entwickelt ein lineares Modell für den drehzahlsynchronen, sanften Rotor–Stator–Kontakt mit Rotorverformung durch Reibungswärme. In mitrotierenden Koordinaten beobachtet man einen langsamen Zuwachs der Amplitude und eine Veränderung der Phase, weshalb der Begriff „Spiralschwingungen“ (*spiral vibrations*) gebräuchlich ist.

LIEBICH (1998), [40] erweitert das lineare Modell von KELLENBERGER auf den allgemeineren Fall eines Rotors mit kontinuierlicher Masseverteilung und einem diskreten Reibort (auch in LIEBICH (1998), [41]). Er entwickelt ein nichtlineares Modell, das die Kontaktbeschreibung von MARKERT (1995), [51] mit Kontaktsteifigkeit enthält. Damit ist er in der Lage, einen intermittierenden Kontakt (*partial rub*) zwischen einem Laval–Rotor und einem elastisch gebetteten Statorring zu beschreiben. Das nichtlineare Modell wird von LIEBICH ebenfalls in [39] und [42] vorgestellt.

Übersichten über weitere Arbeiten zum Rotor–Stator–Kontakt mit Berücksichtigung thermischer Effekte sind bei LIEBICH (1998), [40] und MUSZYŃSKA (1989), [60] aufgeführt.

Arbeiten zum Kontakt des Rotors mit nicht–runden Statorteilen

Es gibt nur wenige Arbeiten über den Rotor–Stator–Kontakt bei nicht–runder Statorgeometrie. Auch in der Praxis ist dieser Fall seltener zu finden. Gehäuse, Dichtungen und Fanglager in Rotormaschinen sind gewöhnlich rund.

MANSOUR und PAVLOV (1973), [46] untersuchen die Kinetik eines so genannten *Kurvenkreisels* analytisch und numerisch. Ein kardanisch gelagerter Kreisel bewegt sich mit seiner verlängerten Kreiselachse an einer starren Kurve entlang. Zwischen der rotierenden Kreiselachse und der Kurve kommt es bei Kontakt zu Normal- und Reibkräften. Die Reibkräfte liefern den Antrieb für die Bewegung entlang der Kurve. Kreiselmomente aufgrund der Bewegung führen zu Normalkräften. Eine geschlossene Kurve kann unter bestimmten Voraussetzungen ohne Kontaktverlust vom Kreisel durchfahren werden. Ecken in der Kurve können vorübergehend zum Kontaktverlust führen. Nach einer freien Nutationsbewegung stößt der Kreisel wieder auf die Kurve. Das numerische Lösungsverfahren untersucht laufend, welche der drei Bewegungsarten Rollen, Gleiten oder freie Nutation, vorliegt.

MAGNUS (1974), [44] erweitert die Theorie von MANSOUR auf nicht konstante Kreiselgeschwindigkeiten und berücksichtigt auch die Trägheiten der kardanischen Aufhängung. Für eine Reihe von Sonderfällen von Kurvenformen gibt er analytische Lösungen an.

In beiden Arbeiten wird der Kontakt einfach modelliert. Die Körper bleiben unverformt,

Rollreibungsverluste und Prolleffekte werden nicht berücksichtigt.

SZCZYGIELSKI und SCHWEITZER (1985), [81] untersuchen die Bewegungen eines schweren, schnellen Kreisels (Pendelrotor), der an einer starren, ebenen Wand anstreifen kann. Sie entwickeln ein Modell, das bereichsweise die Fälle *ohne Kontakt* und *reibungsbehafteter Kontakt mit Gleiten* beschreibt. Die Drehzahl ist so hoch, dass ein Rollen (mit Haften) ausgeschlossen wird. Stoß wird durch eine Stoßhypothese mit Stoßzahl modelliert. Kreiselmomente beim Kippen der Rotorachse werden berücksichtigt. Simulationen und Experimente führen bei konstanter Drehzahl entweder zu periodischen oder zu unregelmäßigen (chaotischen) Bewegungen. Feigenbaumdiagramme zeigen, dass das System bei geringer Reibung und geringer Kontaktdämpfung zu chaotischen Bewegungen neigt. Im Übergangsbereich von periodischen zu chaotischen Bewegungen findet man stets eine Kaskade von Bifurkationen mit Periodenverdopplung.

SZCZYGIELSKI (1986), [79] erweitert das Modell aus [81] um das Anstreifen an kreisförmige, starre Begrenzungen. Dieses Modell umfasst auch das Anstreifen eines Pendelrotors von außen an einen starr gelagerten Zylinder sowie das Anstreifen einer Hohlwelle an einen innen liegenden, starr gelagerten Zylinder (siehe auch SZCZYGIELSKI (1987), [80]).

DIMOFTE und HENDRICKS (1997), [13] untersuchen nicht-runde, gasgeschmierte Gleitlager, bei denen wellenartig Erhöhungen und Vertiefungen in der Lagerfläche angebracht sind. Ein *drei-welliges* Gleitlager kann die Stabilität von Hochdruck-Gasturbinen im Raketenantrieb gegenüber der Verwendung von runden Lagern verbessern. Die Form ähnelt der eines dreiseitigen Fanglagers. Die gemessenen periodischen Bewegungen ähneln denen, die in dreiseitigen Fanglagern zu beobachten sind. Im Modell werden hier allerdings keine Kontaktkräfte, sondern hydrodynamische Kräfte berücksichtigt.

SIMON und BROMMUNDT (1997), [73] untersuchen theoretisch und experimentell periodische Bewegungen eines Pendelrotors, der in einem polygonförmigen Fanglager anschlägt. Eine progressive Kennlinien, die die Normalkraft abhängig von Verformung und Verformungsgeschwindigkeit in der Kontaktzone erfasst, beschreibt einen verlustbehafteten Kontakt. Die Umfangskraft wird mit einer gemessenen, geschwindigkeitsabhängigen Reibzahl-Kennlinie beschrieben. Sie zeigen, dass die selbsterregten, gegenläufigen Rotorbewegungen im dreiseitigen Fanglager geringere Geschwindigkeiten und Kontaktkräfte aufweisen als die im vierseitigen Fanglager. In [74] vergleichen sie selbsterregte Rotorbewegungen in drei- und vierseitigen Fanglagern mit denen in runden Fanglagern. Rechnung und Experiment zeigen, dass sich die geringsten Umlaufgeschwindigkeiten und Kontaktkräfte beim Kontakt zum dreiseitigen Fanglager einstellen.

Verwendete Kontaktmodelle

Die Modellierung eines Systems mit Kontakt wirft grundsätzliche Schwierigkeiten auf und ist Gegenstand aktueller Forschung. Während des Kontakts entstehen zwischen den beiden Kontaktkörpern zumeist sehr steife Bindungen, die die übrigen beteiligten Steifigkeiten um ein Vielfaches übersteigen können. Der Bewegungszustand der beteiligten Körper ändert sich in sehr kurzer Zeit drastisch. Ein Modell, das die Zustände *mit Kontakt* und *ohne Kontakt* beschreibt, ist im allgemeinen stark nichtlinear.

Zahlreiche Arbeiten modellieren den Kontakt mit (einseitigen) **geometrischen Beschränkungen**. Rotor und Stator können nicht ineinander eindringen. Die Verformungen des Kontaktgebiets bleibt unberücksichtigt. Das einfache Kontaktmodell wird insbesondere bei permanentem Kontakt oder dann, wenn einer der Kontaktpartner als masselos betrachtet wird, verwendet. Stoß- und Prellvorgänge sowie Dämpfung im Kontakt sind ausgeschlossen. Der starre Kontakt wird **reibungsfrei** ([1], [25], [35]) oder **mit Coulombscher Reibung** ([5], [6], [11], [16], [33], [34], [37], [41], [44], [46], [50], [66], [87], [91]) formuliert.

Bei den klassischen Modellen für einen stoßartigen Kontakt vollzieht sich der Kontakt in unendlich kurzer Zeit. Eine **Stoßhypothese** liefert den Geschwindigkeitszustand des Systems unmittelbar nach dem Stoß in Abhängigkeit vom Geschwindigkeitszustand unmittelbar vor dem Stoß. Reibung und Verluste können berücksichtigt werden. Für eine Simulation müssen die Lösungen der (linearen) Bewegungsgleichung von Stoß zu Stoß angestückelt werden. Mit diesem Kontaktmodell sind die Arbeiten [3], [14], [79], [80] und [81] ausgestattet.

Einfache Modelle, die eine Verformung des Kontaktbereichs berücksichtigen, führen eine lineare ([39], [40], [42], [51], [90]) oder nichtlineare ([15]) Kennlinie für die Normalkraft ein. Verluste werden berücksichtigt, wenn die Normalkraft zusätzlich von der Verformungsgeschwindigkeit abhängt ([73], [74]).

Wird Reibung berücksichtigt, dann in der Regel als Coulombsche Reibung. Die Arbeiten [73] und [74] verwenden dagegen Kennlinien für eine geschwindigkeitsabhängige Reibzahl.

Eine Zusammenstellung verschiedener Kontaktmodelle, die bei der numerischen Simulation von Anstreifvorgängen Verwendung finden, ist bei MARKERT und WEGENER in [53] und [86] zu finden.

Die Geschwindigkeit, die der Wellenmittelpunkt bei selbsterregten Bewegungen im Fanglager erreicht, hängt empfindlich von Reibung und Dämpfung beim Kontakt ab. Will man die Gefahr des *backward whirl* und die Größe der Kontaktkräfte bei unterschiedlichen Fanglagerformen bewerten, so müssen Reibung und Kontaktverluste wirklichkeitsnah modelliert werden. Bei permanentem Kontakt sollten auch Verluste durch Gleit- und Rollbewegungen sowie Schlupf berücksichtigt werden.

1.5 Ziel und Inhalt dieser Arbeit

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Beantwortung der folgenden Frage:

Bietet ein polygonförmiges Fanglager Vorteile gegenüber einem herkömmlichen, runden Fanglager?

Wenn ja, schließen sich weitere Fragen an:

- Welche Vorteile bietet es und warum?
- Bei welchen Rotormaschinen und Betriebszuständen entstehen die Vorteile?
- Welche Fanglagerform (welches Polygon) besitzt die besten Eigenschaften?
- Welchen Einfluss haben neben der Form andere Parameter?
- Welche Bewegungen, Schwingungen, Effekte können auftreten?

Um diese Fragen zu beantworten, gilt es die Eigenschaften der polygonförmigen Fanglager durch Rechnungen und Experimente an einfachen Rotormodellen zu untersuchen.

Gefordert ist ein Rechenmodell, mit dem die Bewegung eines Rotors in einem polygonförmigen Fanglager simuliert werden kann. Für die Bewertung der polygonförmigen Fanglager sollen die Rotorbewegungen mit denen verglichen werden, die sich in runden Fanglagern ergeben. Besondere Aufmerksamkeit gilt den gefährlichen, selbsterregten Schwingungen, die in runden Fanglagern als *backward whirl* bekannt sind. Es wird ein Kontaktmodell benötigt, das alle wesentlichen Mechanismen enthält, die eine solche Schwingung anfachen oder dämpfen. Gegenüber vorhandenen Modellen für den Rotor–Stator–Kontakt sollen folgende Verbesserungen erreicht werden:

- Berücksichtigung von Verlusten, die bei permanentem, stationärem Kontakt entstehen.
- Berücksichtigung *geschwindigkeitsabhängiger* Reibung.

Im Kapitel 2 der vorliegenden Arbeit werden die Simulationsmodelle entwickelt. Zunächst leiten wir ein einfaches, ebenes Modell für den Kontakt einer runden Welle mit einem allgemeinen polygonförmigen Fanglager her. Eine Normal- und eine Reibkraft greift in einem Kontaktpunkt konzentriert an. Die Normalkraft wird durch eine nichtlineare Kennlinie in Abhängigkeit von Verformung und Verformungsgeschwindigkeit des Kontaktbereichs beschrieben. Die Reibung formulieren wir mit einer geschwindigkeitsabhängigen Kennlinie. Der Einfluss einer lokalen Erwärmung der Kontaktzone auf die Form des Rotors oder die Kontaktparameter bleibt unberücksichtigt.

Um auch den permanenten Kontakt, wie er in runden Fanglagern entstehen kann, zu beschreiben, wird das Kontaktmodell erweitert. Wir berücksichtigen Rollreibungsverluste,

die allein dadurch entstehen, dass die Kontaktzone durch das Material wandert, es gewalkt wird. Der Kontakt wird nicht länger als punktförmig angenommen. Kontaktzone und Kontaktkräfte werden in ihrer räumlichen Ausbreitung betrachtet. Wir formulieren ein Rollreibungsmoment.

Wir entwickeln ein drei-dimensionales Finite-Elemente-Modell für den *schiefen* Kontakt zwischen einer elastischen Hülse, die die Welle ummantelt und einer Fangfläche. Das Modell liefert nichtlineare Kennlinien für die Normalkräfte im Kontakt, die in die Bewegungsgleichungen eingehen.

Wir stellen eine Bewegungsgleichung für die ebene Bewegung eines elastisch und gedämpft aufgehängten, massebehafteten *Fanglagers* auf. Weiter stellen wir je eine einfache Bewegungsgleichung für einen *Laval-Rotor* und einen *Pendelrotor* auf. Bei der Rotorbewegung beschränken wir uns auf zwei Freiheitsgrade. Dies sind die radialen Auslenkungen des Rotors in der Fanglagerebene. Die Drehzahl oder — bei Resonanzdurchfahrten — die Winkelbeschleunigung des Rotors wird als Verlauf über der Zeit vorgegeben. Wir berücksichtigen Unwucht und geometrische Exzentrizität. Die Bewegungsgleichung des Gesamtsystems setzt sich aus den Bewegungsgleichungen der Teilsysteme *Fanglager* und *Rotor* zusammen. Die Kontaktkräfte koppeln die Bewegungsgleichungen.

In Kapitel 3 stellen wir numerischen Verfahren zum Lösen der nichtlinearen Bewegungsgleichungen und die entwickelten Simulationsprogramme vor.

In Kapitel 4 und 5 berechnen wir Bewegungen von Laval-Rotor und Pendelrotor beim Kontakt mit verschiedenen polygonförmigen und mit runden Fanglagern. Die Fanglager sind starr oder elastisch aufgehängt. Bei konstanter Drehzahl ermitteln wir periodische, quasi-periodische oder unregelmäßige (chaotische) Bewegungen. Weiter simulieren wir transiente Resonanzdurchgänge beim An- oder Auslauf der Rotoren. Wir ermitteln die Einflüsse der Fanglagerform, der Kontaktparameter und sonstiger Parameter auf die simulierten Bewegungen.

Kapitel 6 zeigt Messergebnisse, die wir an einem Versuchsstand gewonnen haben, der mit einem *Laval-Rotor* und mit einem *Pendelrotor* bestückt wurde. Die Rotoren wurden jeweils mit einem dreiseitigen, vierseitigen oder einem runden Fanglager ausgerüstet. Die Fanglager wurden entweder unmittelbar am Gestell (sehr steif) oder an Gummifedern (weich) aufgehängt. Die Antriebssteuerung gestattete den Betrieb mit konstanten Drehzahlen oder mit einer vorgegebenen Drehzahlrampe für Beschleunigungs- und Abbremsläufe. Experimentell wurde so der Einfluss der Fanglagerform, der Fanglager-Aufhängung und der Reibung auf periodische Bewegungen und Resonanzdurchläufe des Rotors untersucht.

Kapitel 2

Modelle und Bewegungsgleichungen

In diesem Kapitel entsteht zunächst ein einfaches, ebenes Modell für den Kontakt eines Rotors mit einem *polygonförmigen* Fanglager. Um auch den Kontakt mit einem *runden* Fanglager beschreiben zu können, muss das Modell um den Einfluss der Rollreibung erweitert werden. Das Kontaktmodell verbindet die Bewegungsgleichung des elastisch aufgehängten Fanglagers mit der des Rotors. Wir entwickeln Simulationsmodelle für zwei einfache Typen von Rotormaschinen, einen *Laval-Rotor* und einen *Pendelrotor*.

2.1 Kontaktmodell für polygonförmige Fanglager

Die Bewegungen eines Rotors, der in einem polygonförmigen Fanglager umläuft, hängt empfindlich von Reibung und Dämpfung beim Kontakt ab. Wir entwickeln daher ein Kontaktmodell, das die Verformungen in der Kontaktzone, die Energieverluste beim Kontakt sowie Haften und Reiben in der Kontaktfläche in möglichst einfacher, aber effizienter Weise berücksichtigt. Der Einfluss einer lokalen Erwärmung der Kontaktzone bleibt unberücksichtigt.

2.1.1 Kontaktkinematik

Wir betrachten ein allgemeines, polygonförmiges Fanglager, das aus m ebenen Fangflächen besteht und die runde Welle vollständig umschließt. Wir nehmen an, dass sich alle Kräfte zwischen Welle und Fanglager mit hinreichender Genauigkeit so behandeln lassen, als wirkten sie ausschließlich in einer Ebene, der *Fanglagerebene*.

Wir definieren ein kartesisches Referenzsystem (x, y, z) , dessen x - und y -Achse die Fanglagerebene aufspannen, während die z -Achse in Richtung der Welle in ihrer Ruhelage weist (vgl. Abschnitt 2.5).

Den geometrischen Mittelpunkt des runden Teils des Rotors (Welle, Fanglagerzapfen oder ummantelnde Hülse), der im Fanglager anschlagen kann, bezeichnen wir mit **Wellenmittelpunkt** W . Die Lage des Rotors in der Fanglagerebene wird durch seine Koordinaten x_W und y_W erfasst.

Das Fanglager ist elastisch gefesselt und kann sich als Starrkörper in der Fanglagerebene bewegen. Mit dem Fanglager ist ein Koordinatensystem (x', y', z') körperfestes verbunden, das in der statischen Ruhelage auf das Referenzsystem fällt. Den Punkt im Ursprung des körperfesten Systems bezeichnen wir als **Fanglager-Zentrum** F . Später (vgl. Abschnitt 2.4) werden wir fordern, dass der Punkt F auf den Massenmittelpunkt des Fanglagers fällt. Die ebenen Starrkörperbewegungen des Fanglagers werden mit den Koordinaten x_F , y_F und dem Winkel φ_F (Drehung der x' -Achse gegen die x -Achse) erfasst (siehe Bild 2.1).

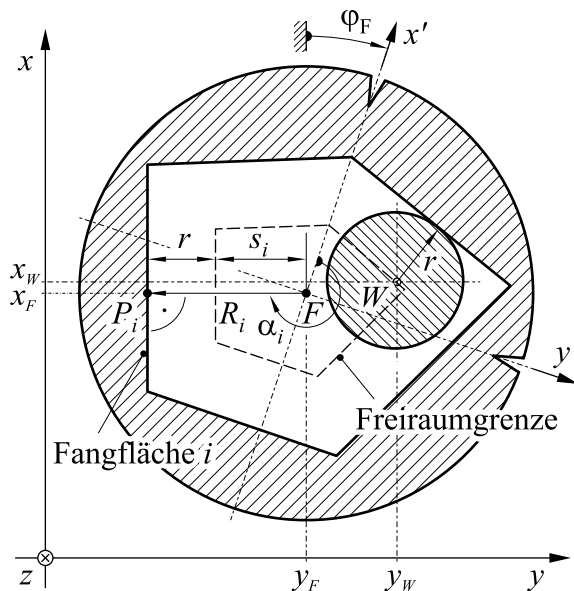


Bild 2.1: Form und Kennmaße eines allgemeinen polygonförmigen Fanglagers. Abstand R_i und Winkel α_i beschreiben die Anordnung jeder einzelnen Fangfläche i . Die Lage des Fanglagers selbst wird mit den Koordinaten x_F , y_F und φ_F angegeben. Sobald der Wellenmittelpunkt W die Freiraumgrenze (gestrichelt) innerhalb des Fanglagers erreicht, steht die Welle im Kontakt mit dem Fanglager.

Die Formen der verschiedenen polygonförmigen Fanglager beschreiben wir durch die relative Lage jeder der Fangflächen i ($i = 1, \dots, m$) bezogen auf (F, x', y', z') . Dazu geben wir zwei Parameter an: den lotrechten Abstand R_i zwischen dem Fanglager-Zentrum F und der Fangfläche sowie den Winkel α_i zwischen x' -Achse und dem Normalenvektor \underline{n}_i , der auf die Fläche i zeigt (vgl. Bild 2.1). Dort, wo das Lot vom Punkt F auf die Fangfläche trifft, liegt der **Aufpunkt** P_i . Sollte das Fanglager-Zentrum F „hinter“ der Fangfläche i , also nicht innerhalb des Polygons liegen, wird der Abstand R_i negativ.

Polygone mit stumpfen Innenwinkeln (über 180°) werden ausgeschlossen. Weiter unten (Seite 27) werden wir eine noch engere Forderung an die Innenwinkel stellen.

Zu jeder der Fangflächen definieren wir das Spiel

$$s_i := R_i - r . \quad (2.1)$$

Ein Polygon, das analog zur Fangfläche gebildet wird, bei dem allerdings die Abstände R_i durch s_i ersetzt werden, bezeichnen wir als **Freiraum** (siehe Bild 2.1). Solange sich der Wellenmittelpunkt W innerhalb des Freiraums befindet, bleibt die Welle ohne Kontakt zum Fanglager. Der Freiraum bewegt sich mit dem Fanglager mit.

Weiter definieren wir zu jeder Fangfläche i einen Normalenvektor \underline{n}_i , der so orientiert ist, dass er vom Inneren des Fanglagers auf die Oberfläche der Fangfläche i weist (siehe Bild 2.2). Ein Tangentialvektor \underline{t}_i liegt tangential zur Fangfläche i und ist so orientiert, dass \underline{n}_i und \underline{t}_i zusammen mit der axialen Richtung z ein Rechtssystem ($\underline{n}_i, \underline{t}_i, z$ -Achse) bilden.

$$\underline{n}_i = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i + \varphi_F) \\ \sin(\alpha_i + \varphi_F) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{t}_i = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha_i + \varphi_F) \\ \cos(\alpha_i + \varphi_F) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Betrachten wir nun den Kontakt zwischen Welle und Fangfläche i etwas genauer. Dazu definieren wir den **Kontaktpunkt** K_i , der dort liegt, wo das Lot vom Punkt W die verformte Fangfläche trifft (siehe Bild 2.2).

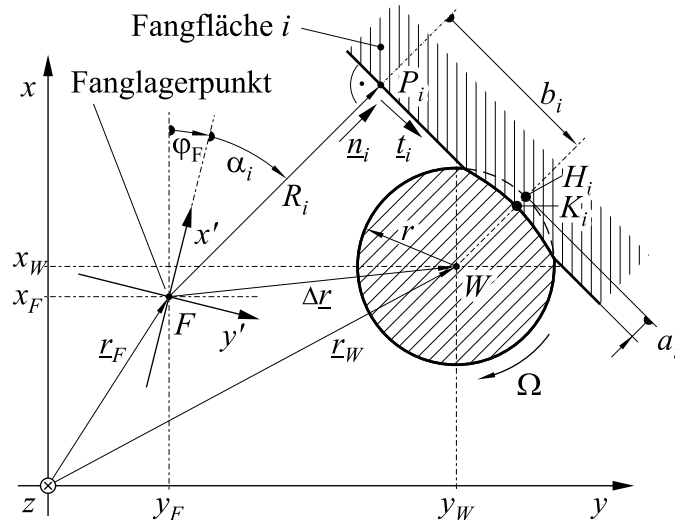


Bild 2.2: Kontaktkinematik. Die Welle steht im Kontakt mit der Fangfläche i . Wellenoberfläche und Fangfläche haben sich verformt. Wir definieren einen Kontaktpunkt K_i und ermitteln die Eindringung a_i sowie den Abstand b_i zum Aufpunkt P_i der Fangfläche.

Im Kontaktpunkt K_i sollen die verteilten Kontaktkräfte zwischen Welle und Fangfläche zusammengefasst werden. Bei einfachen Verhältnissen (homogener Werkstoff, keine Rollreibung) finden wir hier die größten Verformungen der beiden Oberflächen. In Normalenrichtung sind dies die maximale Abplattung der Welle und die maximale Eindrückung

der Fangfläche. Später wollen wir annehmen, dass die Eindrückung der Fangfläche gegenüber der Abplattung der Welle vernachlässigt werden kann. In jedem Fall bezeichnen wir die Summe der beiden Verformungen im Kontaktpunkt mit **Eindringung** a_i . Dies ist die Annäherung der Welle an die Fangfläche über den beginnenden Kontakt hinaus. Der Wellenmittelpunkt liegt um den Wert der *Eindringung* außerhalb der Freiraumgrenze. Ohne Kontakt, wenn der Wellenmittelpunkt innerhalb der Freiraumgrenze liegt, soll die Eindringung negativ sein ($a_i < 0$). Ihr Betrag bezeichnet dann den Abstand zwischen Wellenoberfläche und Fangfläche.

Im Folgenden wollen wir die Eindringung a_i in Abhängigkeit der Lagekoordinaten von Welle und Fanglager ausdrücken. Dazu dient ein **Hilfspunkt** H_i , der sich unter dem Winkel $\varphi_F + \alpha_i$ (von der x -Achse aus) auf der als unverformt gedachten Wellenoberfläche befindet (vgl. Bild 2.2). Ist die Wellenoberfläche tatsächlich unverformt, so fallen Hilfspunkt und Kontaktpunkt zusammen.

Für die Strecke $\overline{P_i H_i} =: \underline{r}_{P_i H_i}$ ergibt sich die Vektordifferenz

$$\underline{r}_{P_i H_i} = (\underline{r}_W + r \underline{n}_i) - (\underline{r}_F + R_i \underline{n}_i) . \quad (2.3)$$

Hierin sind \underline{r}_W und \underline{r}_F die Ortsvektoren der Punkte W und F . Für die Beträge der Vektoren definieren wir

$$\rho_W := |\underline{r}_W| \quad \text{und} \quad \rho_F := |\underline{r}_F| . \quad (2.4)$$

Dies sind die radialen Auslenkungen von Welle (Rotor) und Fanglager, die wir später darstellen werden.

Die Projektion von $\underline{r}_{P_i H_i}$ auf den Normalenvektor \underline{n}_i liefert die Eindringung a_i . Die Projektion auf den Tangentialvektor \underline{t}_i liefert den Abstand b_i , der weiter unten zum Formulieren des Momentengleichgewichts des elastisch aufgehängten Fanglagers benötigt wird:

$$a_i = (\underline{r}_W - \underline{r}_F) \cdot \underline{n}_i - R_i + r , \quad (2.5)$$

$$b_i = (\underline{r}_W - \underline{r}_F) \cdot \underline{t}_i . \quad (2.6)$$

Für den Vektor $\Delta \underline{r}$ vom Fanglager-Zentrum F zum Wellenmittelpunkt W führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\Delta \underline{r} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ 0 \end{bmatrix} := (\underline{r}_W - \underline{r}_F) , \quad |\Delta \underline{r}| =: \rho \quad (2.7)$$

Mit dem Fanglagerspiel s_i (Gl. (2.1)) erhalten wir für die Eindringung a_i bzw. den Abstand b_i .

$$a_i = \Delta x \cos(\alpha_i + \varphi_F) + \Delta y \sin(\alpha_i + \varphi_F) - s_i , \quad (2.8)$$

$$b_i = -\Delta x \sin(\alpha_i + \varphi_F) + \Delta y \cos(\alpha_i + \varphi_F) . \quad (2.9)$$

Geschwindigkeiten

Gerade bei den polygonförmigen Fanglagern ist es, wie wir zeigen werden, von Vorteil, *einen* der Kontaktpartner mit einer stoßdämpfenden Auflage auszustatten. Ist diese Fläche um ein vielfaches nachgiebiger als ihr Kontaktpartner, so kann der Kontaktpartner als starr angesehen werden. Bei unseren Experimenten war es die Welle, die mit einer Hülse aus einem Polymer ummantelt war. Die Fangflächen dagegen bestanden aus deutlich steiferem Aluminium.

Vereinfachend wird im Folgenden nur die Verformung der Hülse betrachtet. Die Fangfläche gelte als starr. Eine solche Annahme ist nicht zwingend notwendig, führt aber zu einer vereinfachten Beschreibung der Lage des Kontaktpunkts K_i : Er befindet sich (bei Kontakt) auf der *unverformten* Fangfläche (siehe Bild 2.3). Seine Lage ist damit unabhängig von der Kontaktkraft. Zeigen beide Kontaktpartner eine ähnliche, aber insgesamt vernachlässigbar geringe Verformung ($a_i \ll r$), so ist diese Vereinfachung ebenfalls gerechtfertigt. Der umgekehrte Fall einer starren Wellenoberfläche und einer nachgiebigen Fangfläche ließe sich auch vereinfacht behandeln. Dann könnte man annehmen, dass der Kontaktpunkt auf der stets unverformten Oberfläche der Welle läge.

Für die Beschreibung von Kontaktdämpfung und Reibung ermitteln wir die Normal- und Tangentialkomponenten der Relativgeschwindigkeit zwischen Welle und Fanglager im Kontakt. Dazu betrachten wir zunächst die Geschwindigkeiten der materiellen Punkte von Welle $\underline{v}_{K_i}^W$ und Fangfläche $\underline{v}_{K_i}^F$, die sich momentan im Kontaktpunkt K_i befinden:

$$\underline{v}_{K_i}^W = \underline{v}_W + (r - a_i) \underline{\Omega} \times \underline{n}_i, \quad (2.10)$$

$$\underline{v}_{K_i}^F = \underline{v}_F + R_i \underline{\dot{\varphi}}_F \times \underline{n}_i + b_i \underline{\dot{\varphi}}_F \times \underline{t}_i. \quad (2.11)$$

Hierin sind \underline{v}_W und \underline{v}_F die Geschwindigkeitsvektoren der Punkte W und F . Für deren Beträge, die Bahngeschwindigkeiten, definieren wir

$$v_W := |\underline{v}_W| \quad \text{und} \quad v_F := |\underline{v}_F|. \quad (2.12)$$

Weiter sind $\underline{\Omega}$ und $\underline{\dot{\varphi}}_F$ die Winkelgeschwindigkeiten von Welle und Fanglager in vektorieller Form:

$$\underline{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\dot{\varphi}}_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_F \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Mit der Abkürzung $\Delta \underline{v}$ für die Relativgeschwindigkeit des Wellenmittelpunkts W gegenüber dem Fanglager-Zentrum F (vgl. Gl. (2.7)),

$$\Delta \underline{v} = \Delta \dot{\underline{r}} = \begin{bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} := (\underline{v}_W - \underline{v}_F), \quad (2.14)$$

folgt die Relativgeschwindigkeit

$$\begin{aligned}\underline{v}_{rel,i} &= \underline{v}_{K_i}^W - \underline{v}_{K_i}^F \\ &= \Delta \underline{v} + [(r - a_i) \underline{\Omega} - R_i \underline{\dot{\varphi}}_F] \times \underline{n}_i - b_i \underline{\dot{\varphi}}_F \times \underline{t}_i\end{aligned}\quad (2.15)$$

der Kontaktpartner im Kontaktpunkt.

Die Projektion der Relativgeschwindigkeit $\underline{v}_{rel,i}$ auf den Normalenvektor \underline{n}_i (oder die Differentiation von Gleichung (2.8)) liefert als Eindringgeschwindigkeit \dot{a}_i die Normalkomponente

$$\begin{aligned}v_{ni} = \dot{a}_i &= \underline{v}_{rel,i} \cdot \underline{n}_i \\ &= \Delta \underline{v} \cdot \underline{n}_i + b_i \dot{\varphi}_F \\ &= (\Delta \dot{x} + \Delta y \dot{\varphi}_F) \cos(\alpha_i + \varphi_F) + (\Delta \dot{y} - \Delta x \dot{\varphi}_F) \sin(\alpha_i + \varphi_F)\end{aligned}\quad (2.16)$$

der Relativgeschwindigkeit. Von dieser Größe wird die „Eindringdämpfung“ beim Kontakt abhängen.

Für die Formulierung einer geschwindigkeitsabhängigen Reibung wird dagegen die Tangentialkomponente v_{ti} der Relativgeschwindigkeit benötigt. Wir projizieren $\underline{v}_{rel,i}$ auf den Tangentialvektor \underline{t}_i und erhalten:

$$\begin{aligned}v_{ti} &= \underline{v}_{rel,i} \cdot \underline{t}_i \\ &= \Delta \underline{v} \cdot \underline{t}_i + (r - a_i) \Omega - R_i \dot{\varphi}_F \\ &= -(\Delta \dot{x} + \Delta y \dot{\varphi}_F) \sin(\alpha_i + \varphi_F) + (\Delta \dot{y} - \Delta x \dot{\varphi}_F) \cos(\alpha_i + \varphi_F) \\ &\quad + (r - a_i)(\Omega - \dot{\varphi}_F)\end{aligned}\quad (2.17)$$

2.1.2 Kontaktkräfte und Kennlinien

Die Wechselwirkungen zwischen Rotor und Fanglager wollen wir durch *Kontaktkräfte* beschreiben. Sie bieten den Vorteil, sich einfach in die Gleichgewichtsbedingungen und damit in die Bewegungsgleichungen einfügen zu lassen. Die Abhängigkeit der Kontaktkräfte von den Zustandsgrößen wird mit Hilfe von *Kennlinien* erfasst.

Wir führen Kennlinien für Normal- und Reibkräfte in Form von analytischen Ausdrücken ein. Die wenigen Parameter dieser Funktionen identifizieren wir aus gemessenen Kennlinien (vgl. Abschnitt 6.3). In Abschnitt 2.3 zeigen wir, wie man eine Kennlinie mit Hilfe eines Finite-Elemente-Modells gewinnen kann.

Es sei erwähnt, dass man in ein numerisches Simulationsmodell statt einer Kennlinie auch direkt eine Wertetabelle integrieren kann.

Kontaktkräfte

Wir nehmen an, dass die Normal- und Tangentialspannungen, die in der ausgedehnten Kontaktfläche wirken, sich auf Kontaktkräfte reduzieren lassen, die im Punkt K_i angreifen. Wenn die Spannungen nicht symmetrisch zum Kontaktpunkt verteilt sind, entsteht im Allgemeinen auch ein Kontaktmoment bezüglich des Kontaktpunkts. Diesen Einfluss werden wir zunächst vernachlässigen, später aber (Abschnitt 2.2.2) für den Kontakt im runden Fanglager betrachten.

Das Freikörperbild (Bild 2.3) zeigt die Normalkraft N_i und die Tangentialkraft T_i , die von der Fangfläche i auf die Welle wirken. Die Normalkraft ist so orientiert, dass sie ein (weiteres) Eindringen der Welle zu verhindern sucht. Die Tangentialkraft ist so orientiert, dass sie eine Relativbewegung der Kontaktpartner gegeneinander hemmt. In Abschnitt werden wir das Kontaktmodell verbessern und zusätzlich ein Kontaktmoment einführen.

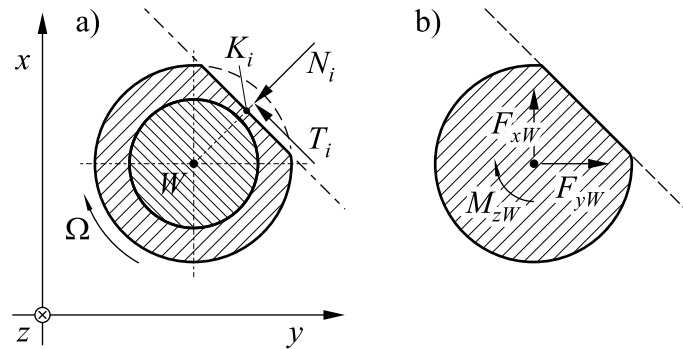


Bild 2.3: a) Ein Kontaktkraft-Paar: Normalkraft N_i und Tangentialkraft T_i , die von der Fangfläche i auf die nachgiebige Hülse der Welle wirken und im Kontaktpunkt K_i angreifen. b) Die Kontaktkräfte aller Fangflächen werden zu resultierenden Kontaktreaktionen im Punkt W zusammengefasst: Kraftkomponenten F_{xW} , F_{yW} und Moment M_{zW} gemäß Gl. (2.22) (Zählrichtung gemäß Referenzsystem).

Normalkraft-Kennlinie

Die Kennlinie

$$N_i(a_i, v_{ni}) = \tilde{N}_i(a_i) e^{(b_K v_{ni})} \quad (2.18)$$

beschreibt die Normalkraft eines nichtlinear-elastischen, verlustbehafteten Kontakts (siehe Bild 2.4). Die Normalkraft $\tilde{N}_i(a_i)$, die sich bei statischer Versuchsführung ergeben würde,

soll hier einem Potenzgesetz genügen.

$$\tilde{N}_i(a_i) = \begin{cases} 0 & \forall a_i < 0 \\ k_K a_i^p & \forall a_i \geq 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Der Parameter k_K , ein Maß für die Kontaktsteifigkeit, und der Exponent p bestimmen die statische Kennlinie. Die Herzschen Formeln geben für die Flächenpressung eines Zylinders gegen eine Ebene den Exponenten $p = 1,08$ an. Liegt die Zylinderachse nicht parallel zur Ebene, so dass anfänglich ein Punktkontakt herrscht, dann erhöht sich der Exponent. Experimente und Finite-Elemente-Analysen führen uns zu Kennlinien mit Exponenten von $p = 1,7 \dots 2,0$. Der Steifigkeitsparameter k_K muss abhängig von den dem zuvor festgelegten Exponenten p bestimmt werden. Bei einer linearen oder degressiven Kennlinie ($p \leq 1$) sollte der Knick im Ursprung geeignet ausgerundet werden, um numerischen Schwierigkeiten bei der Integration der Bewegungsgleichung vorzubeugen (vgl. Abschnitt 3.1).

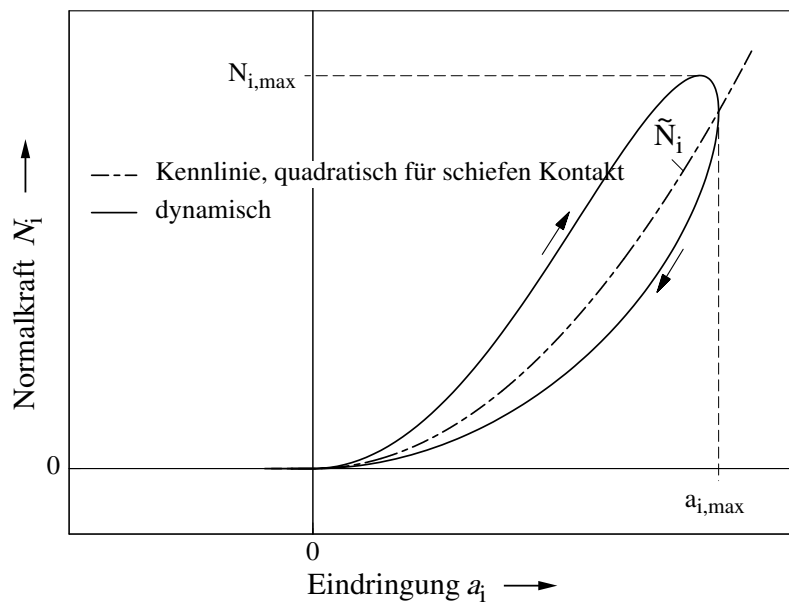


Bild 2.4: Normalkraftkennlinie in Abhängigkeit der Eindringung a_i . Der Verlauf \tilde{N}_i (strich-punktiert) ergibt sich bei quasi-statischer Versuchsführung. Der beispielhafte dynamische Verlauf N_i (durchgezogen) nach Gleichung (2.18) ist das Ergebnis eines simulierten Stoßvorgangs.

Der geschwindigkeitsabhängige Faktor $e^{(b_K v_{ni})}$ mit dem Verlustbeiwert b_K führt beim Eindringen zu einer Vergrößerung, beim Rückprall zu einer Verminderung der Normalkraft. Die Fläche innerhalb der aufgespannten Hystereseschleife ist ein Maß für die beim Stoß dissipierte Energie. Bei der maximalen Eindringung $a_{i,max}$ verschwindet die Eindringgeschwindigkeit v_{ni} . Die Normalkraftkennlinie besitzt hier folglich eine vertikale Tangente und die maximale Normalkraft wird bereits vor der maximalen Eindringung erreicht.

Der Produktansatz mit einer Exponentialfunktion gewährleistet, dass keine negativen Normalkräfte (Kleben) entstehen können. Bei der üblichen Formulierung $N_i = \tilde{N}_i(1 + b_K^* v_{ni})$ als Summe von elastischen Kräften und Dämpferkräften ist die Bedingung ($N \geq 0$) dagegen nicht von selbst erfüllt.

Die Normalkraft–Kennlinie ist vollständig bekannt, wenn der Exponent p , der Steifigkeitssparameter k_K und der Verlustbeiwert b_K für die Welle–Fanglager–Paarung identifiziert sind (vgl. Abschnitt 6.3.1).

Die Normalkraft–Kennlinien gemäß Gl. (2.18), (2.19) besitzen einen uneingeschränkten Definitionsbereich. Anschaulich können die Normalkräfte des Kontaktmodells als m nicht-lineare Feder–Dämpfer–Elemente interpretiert werden, die als permanente Bindungen zwischen der Welle und den Fangflächen wirken.

Beschränkung des Innenwinkels zwischen den Fangflächen:

Stößt die Welle in eine Ecke des Fanglagers, dann entsteht gleichzeitig ein Kontakt zu zwei (oder mehr) Fangflächen. Die dazugehörigen Kennlinien liefern entsprechend der jeweiligen Eindringung von Null verschiedene Kontaktkräfte. Liegt der Innenwinkel zwischen diesen Fangflächen zu nahe an 180° , so kann ein Modellfehler entstehen. Die Kontaktzonen, die die Welle gleichzeitig mit den verschiedenen Fangflächen ausbildet, verschmelzen miteinander. Sie sind dann nicht mehr unabhängig voneinander, wovon unser Kontaktmodell ausgeht. Die Kontaktkräfte werden zu groß. Der Kontakt wird als zu steif modelliert. Die Bedingung der Unabhängigkeit muss im Einzelfall durch Simulationsrechnungen überprüft werden.

Reibkraft–Kennlinie

Für die Reibkraft

$$T_i(a_i, v_{ni}, v_{ti}) = N_i(a_i, v_{ni}) \mu_i(v_{ti}) \quad (2.20)$$

wählen wir ein Produkt aus Normalkraft und geschwindigkeitsabhängiger Reibzahl $\mu_i(v_{ti})$. Zur Beschreibung einer tatsächlichen (gemessenen) Kennlinie benutzen wir nach einem Vorschlag von BROMMUNDT (1995), [7], einen ausgerundeten Streckenzug. Die folgende Gleichung zeigt ein Beispiel einer solchen stetigen und stetig differenzierbaren Reibzahl–Kennlinie mit sechs Parametern,

$$\begin{aligned} \mu(v_{ti}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0}{v_0} + \frac{\mu_0 - \mu_1}{v_1 - v_0} \right) & \left(\sqrt{(v_{ti} + v_0)^2 + r_0^2} - \sqrt{(v_{ti} - v_0)^2 + r_0^2} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{v_1 - v_0} \right) \left(\sqrt{(v_{ti} - v_1)^2 + r_1^2} - \sqrt{(v_{ti} + v_1)^2 + r_1^2} \right) . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Zwei Eckpunkte (v_0, μ_0) und (v_1, μ_1) , ($v_0 < v_1$), spannen einen Streckenzug auf, an den sich die Kennlinie abhängig von zwei Ausrundungsparametern r_0 und r_1 anschmiegt. Die Ausrundungsparameter besitzen die Dimension einer Geschwindigkeit. Die Kennlinie ist

symmetrisch zum Ursprung und strebt für wachsende Geschwindigkeiten ($v_{ti} \rightarrow \infty$) dem Wert μ_1 entgegen.

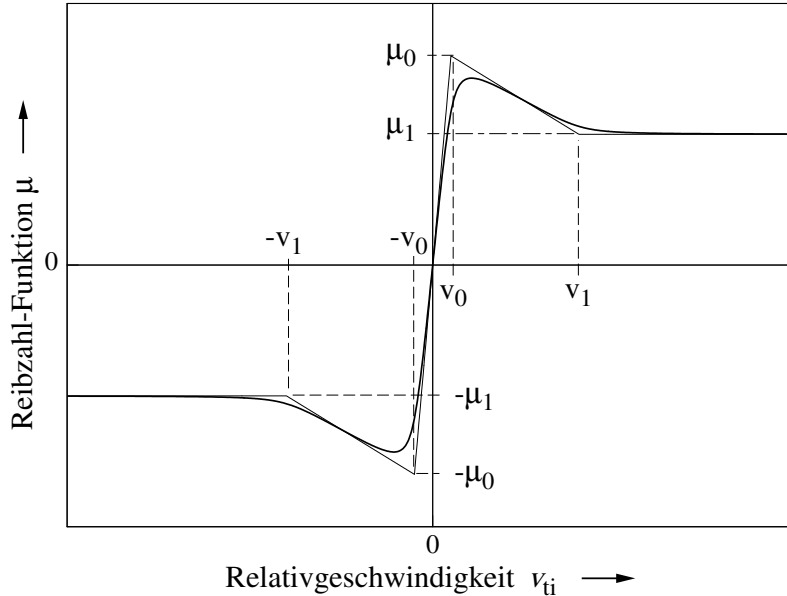


Bild 2.5: Fallende Reibzahl-Kennlinie in Form eines geglätteten Streckenzugs gemäß Gleichung (2.21) nach BROMMUNDT (1995), [7].

Bild 2.5 zeigt ein Beispiel einer *fallenden* Kennlinie ($\mu_0 > \mu_1$) nach Gleichung (2.21). Die maximale Reibzahl, ist in der Umgebung von v_0 zu finden und liegt abhängig von den Ausrundungsparametern (r_0, r_1) unter dem Wert μ_0 . „Echtes Haften“ kann diese Kennlinie strenggenommen nicht erfassen. Die endliche Steigung im Ursprung führt selbst bei geringen Kräften stets zum Gleiten. Diese Tatsache stellt praktisch keinen Nachteil dar. Die Steigung der Kennlinie im Ursprung kann so steil gewählt werden, dass der Modellfehler beliebig gering ausfällt.

Das Kontaktmodell vernachlässigt Momente um die z -Achse bezogen auf den Kontaktpunkt K_i , die bei einer unsymmetrischen Verteilung der Normalspannungen im Kontaktgebiet einer Fangfläche entstehen. Als Ursache käme eine unsymmetrische Verteilung der Verzerrungsgeschwindigkeiten in einem großen Kontaktgebiet in Verbindung mit der Materialdämpfung in Frage. Bei permanentem Kontakt mit großen Verformungen, wie er in runden Fanglagern entstehen kann, muss dieser Einfluss berücksichtigt werden. Im Abschnitt 2.2 leiten wir dazu ein Kontaktmoment M_{zK} her.

Ist ein Fanglager aus unterschiedlich beschaffenen Fangflächen aufgebaut, so müssen für die Fangflächen entsprechend unterschiedliche Paare aus Normal- und Reibkraft-Kennlinien eingesetzt werden.

Resultierende Kontaktreaktionen

Die resultierenden Kontaktreaktionen setzen sich aus den Kontaktkräften aller Fangflächen zusammen. Nur die Fangflächen, mit denen die Welle momentan im Kontakt steht, liefern entsprechend der Kontaktkennlinien einen von Null verschiedenen Beitrag. Die Kraftkomponenten F_{xW} und F_{yW} greifen im Wellenmittelpunkt W an (siehe Bild 2.3). Zusammen mit dem Moment M_{zW} wirken sie vom Fanglager auf die Welle (siehe Bild 2.3-b).

$$\begin{aligned} F_{xW} &= \sum_{i=1}^m [-N_i \cos(\alpha_i + \varphi_F) + T_i \sin(\alpha_i + \varphi_F)] , \\ F_{yW} &= \sum_{i=1}^m [-N_i \sin(\alpha_i + \varphi_F) - T_i \cos(\alpha_i + \varphi_F)] , \\ M_{zW} &= \sum_{i=1}^m [-T_i(r - a_i)] . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Die Gegenkräfte F_{xF} und F_{yF} , die von der Welle auf das Fanglager wirken, werden in das Fanglager-Zentrum F verschoben (siehe Bild 2.17). Für das Moment M_{zF} ergibt sich daher ein von M_{zW} abweichender Wert,

$$\begin{aligned} F_{xF} &= -F_{xW} , \\ F_{yF} &= -F_{yW} , \\ M_{zF} &= \sum_{i=1}^m [-N_i b_i + T_i R_i] = -M_{zW} + F_{xW} \Delta y - F_{yW} \Delta x . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Die Zählrichtung der sechs Kontaktreaktionen folgt der Orientierung des Referenzsystems. Die Größen werden in die Bewegungsgleichungen von Rotor und Fanglager eingefügt.

Der Betrag der resultierenden Kontaktkraft

$$F_{FL} := \sqrt{F_{xW}^2 + F_{yW}^2} \quad (2.24)$$

ist eine skalare Größe, die wir später zur Beurteilung der Fanglager betrachten werden.

2.2 Kontaktmodell für runde Fanglager

Für die Bewertung der polygonförmigen Fanglager soll die Rotorbewegung mit jener verglichen werden, die sich bei runden Fanglagern ergibt. Wir benötigen dazu eine Beschreibung, die den besonderen Bedingungen beim Kontakt einer Welle mit einem *runden* Fanglager gerecht wird.

Im Gegensatz zum polygonförmigen Fanglager beobachten wir im runden Fanglager regelmäßige Bewegungen, bei denen Welle und Fanglager nicht nur stoßartig, sondern über

längere Zeit, oft sogar permanent im Kontakt miteinander stehen. Es kann zum Abwälzen der Welle auf der Fangfläche kommen, wobei Roll- und Gleitvorgänge im allgemeinen gemischt auftreten. Bei der Modellierung dieser Bewegung müssen Energieverluste berücksichtigt werden, die allein dadurch entstehen, dass die Kontaktzone durch das Material wandert, ohne dass sich die Eindringtiefe ändert.

2.2.1 Reines Abrollen bei starr aufgehängtem Fanglager

In einem runden, starr aufgehängten Fanglager kommt es bei hinreichender Reibung im Kontakt zu einer Bewegung, bei der die Welle gegen die Drehrichtung der Welle im Fanglager abrollt (vgl. Bild 2.6). Im Kontaktpunkt haftet die Welle am Fanglager. Unter Vernachlässigung von Verformungen entspricht die Bahn des Wellenmittelpunkts W der Freiraumgrenze $\rho_W = s$.

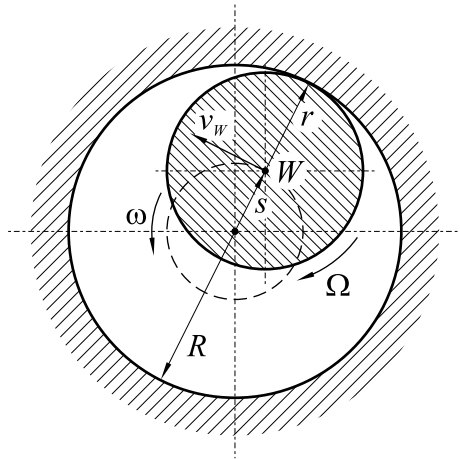


Bild 2.6: Sonderfall: Reines Abrollen der Welle (Radius r , Masse m_W , Drehzahl Ω) im runden, starr aufgehängten Fanglager (Radius R).

Bei einer Winkelgeschwindigkeit Ω der Welle ergibt sich der Betrag v_W der Geschwindigkeit des Wellenmittelpunkts W aus der rein kinematischen Beziehung

$$v_W = \Omega r . \quad (2.25)$$

Die Geschwindigkeit wächst mit dem Radius r der Welle, ist aber unabhängig vom Radius R des Fanglagers.

Die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_{BW} = \frac{r}{R-r} \Omega \quad (2.26)$$

für den Umlauf des Wellenmittelpunkts im Fanglager wächst dagegen über alle Grenzen, wenn sich das Fanglagerspiel $s := R - r$ gegen Null verringert. Das gleiche gilt für die Kontakt-Normalkraft

$$N = m_W (R - r) \omega_W^2 = m_W \frac{r^2}{R - r} \Omega^2 \quad (2.27)$$

bei einer Masse m_W der Welle bzw. des Rotors und bei Vernachlässigung sonstiger Kräfte. Geschwindigkeiten und Kräfte beim Phänomen des *backward whirl* können mit diesen Gleichungen nach oben hin abgeschätzt werden. In der Praxis verhindert der Einfluss des Fluids im Spalt (auch bei Gas) sehr große Winkelgeschwindigkeiten; die Annahme von Haftung oder trockener Reibung verliert ihre Gültigkeit.

2.2.2 Rollreibung

Die folgenden Betrachtungen vereinfachen sich, wenn wir wie zuvor (vgl. Seite 23) annehmen, dass die Welle mit einer weichen Hülse auf eine viel steifere Fangfläche trifft (siehe Bild 2.7). Die Verformungen der Fangfläche werden vernachlässigbar.

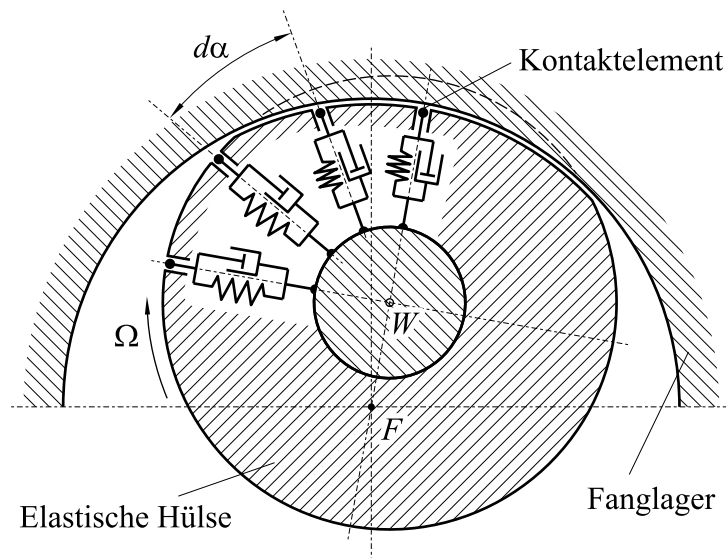


Bild 2.7: Einfaches Werkstoffmodell aus einer Feder–Dämpfer–Bettung für eine nachgiebige Hülse, die den starren Kern der Welle umhüllt. Beim Kontakt mit dem starren, runden Fanglager sollen sich die Kontaktelemente im Kontaktgebiet ausschließlich in radialer Richtung verformen.

Im allgemeinen Fall führt ein Kontakt zwischen Welle und Fangfläche dazu, dass die Verformung laufend neue Bereiche der Hülse erfasst. Selbst bei einer konstanten Eindringtiefe entstehen so Energiedissipationen in der Hülse.

Wir wählen ein vereinfachtes Werkstoffmodell, bei dem die elastische Hülse durch eine kontinuierlich verteilte Feder–Dämpfer–Bettung ersetzt wird. Für diese Bettung wird nur eine Verschiebung in radialer Richtung zugelassen. In Umfangsrichtung verhalte sich unser Modell starr. Die Verformungen benachbarter Elemente seien unabhängig voneinander („Winkler–Bettung“). Diese Näherung ist unzulässig, sobald man mit dem Modell starke Änderungen oder gar Sprünge auf der Hülsoberfläche berechnen würde.

2.2.3 Kontaktkinematik

Bild 2.8 zeigt die geometrischen Beziehungen beim Kontakt zwischen der nachgiebigen Hülse (Radius r , Mittelpunkt W) und dem runden, als starr betrachteten Fanglager (Radius R).

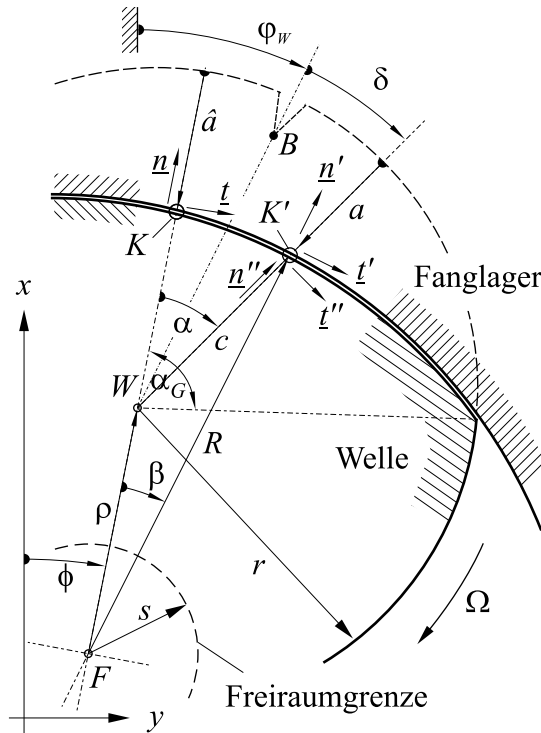


Bild 2.8: Kontaktkinematik. Die Welle mit nachgiebiger Hülse steht in Kontakt mit dem starren, runden Fanglager. Wir betrachten die lokale Eindringung $a(t, \delta)$ am Kontaktelement K' .

Bei einem runden Fanglager legen wir das Fanglager-Zentrum F ohne Beschränkung der Allgemeinheit in dessen geometrischen Mittelpunkt. Die relative Auslenkung der Welle gegenüber dem Fanglager wird mit dem Abstand $\rho = \rho(t)$ zwischen den Punkten W und F vermessen. Dies entspricht der Definition in Gleichung (2.7).

Es kommt zum Kontakt, sobald ρ die Größe des Fanglagerspiels

$$s := R - r \quad (2.28)$$

erreicht. Der Wellenmittelpunkt W trifft auf die *Freiraumgrenze*. Bei weiterer Annäherung der Welle an das Fanglager verformt sich die Hülse, wobei sich das Kontaktgebiet $[-\alpha_G, \alpha_G]$ ausbreitet.

In der Flucht von F und W unter dem Winkel $\phi = \phi(t)$ zur x -Achse finden wir den Kontaktpunkt K auf der Kontaktfläche. Hier liegt die maximale Eindringung („Abplattung“ der Hülse)

$$\hat{a}(t) = \rho(t) - s. \quad (2.29)$$

Wir nehmen an die Verformung der Welle sei symmetrisch zur Achse durch F und W .

Die Rotation der Welle wird durch den Winkel $\varphi_W(t)$ zwischen der x -Achse und einem wellenfesten Bezugsstrahl \overline{WB} erfasst. Die Lage eines beliebigen anderen wellenfesten Punkts K' auf der Kontaktfläche beschreiben wir durch die materielle Koordinate δ (vgl. Bild 2.8). Zusätzlich definieren wir die Winkel $\alpha := \angle KWK'$ bzw. $\beta := \angle KFK'$.

Für den Winkel α gilt bei $\rho > s$

$$\alpha = \alpha(t, \delta) = \varphi_W(t) + \delta - \phi(t)$$

und für den Zusammenhang zwischen α und β gilt

$$\sin \beta(t, \delta) = \frac{r - a(t, \delta)}{R} \sin \alpha(t, \delta). \quad (2.30)$$

Am Punkt K' finden wir die Eindringung

$$a(t, \delta) = r - \sqrt{R^2 - [\rho(t) \sin \alpha(t, \delta)]^2} + \rho \cos \alpha(t, \delta) \quad (2.31)$$

Der Grenzwinkel α_G für das Kontaktgebiet $[-\alpha_G, \alpha_G]$ folgt aus $a(t, \delta) \stackrel{!}{=} 0$ zu

$$\cos \alpha_G(t) = \frac{R^2 - r^2 - \rho^2(t)}{2r\rho(t)}. \quad (2.32)$$

Geschwindigkeiten

Die radiale Verformungsgeschwindigkeit $\dot{a} = \dot{a}(t, \delta)$ der Bettung an der materiellen Stelle δ lässt sich analytisch aus Gleichung (2.31) durch Differentiation gewinnen. Es gilt

$$\dot{a}(t, \delta) = \frac{c(t, \delta) \rho(t) \sin \alpha(t, \delta) \left[\dot{\phi}(t) - \Omega(t) \right] + c(t, \delta) \dot{\rho}(t) \cos \alpha(t, \delta) + \rho(t) \dot{\rho}(t)}{c(t, \delta) + \rho(t) \cos \alpha(t, \delta)} \quad (2.33)$$

mit

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \dot{\varphi}_W(t), \\ c(t, \delta) &= r - a(t, \delta) \quad \text{und} \\ \alpha(t, \delta) &= \varphi_W(t) + \delta - \phi(t). \end{aligned}$$

Damit lässt sich Verformungsgeschwindigkeit \dot{a} vollständig durch die Koordinaten der Welle (x_W, y_W, φ_W) und des Fanglagers (x_F, y_F, φ_F) sowie deren Geschwindigkeiten $(\dot{x}_W, \dot{y}_W, \dot{\varphi}_W)$ und $(\dot{x}_F, \dot{y}_F, \dot{\varphi}_F)$ ausdrücken.

Für die geschwindigkeitsabhängige Reibung am Kontaktelement wird die Relativgeschwindigkeit v_t zwischen Hülse und Fangfläche tangential zur Fangfläche benötigt. Wir ermitteln

die Geschwindigkeiten $\underline{v}_{K'}^W$ und $\underline{v}_{K'}^F$ der materiellen Punkte von Hülse (Welle) und Fanglager, die sich momentan im Punkt K' miteinander in Kontakt befinden.

$$\underline{v}_{K'}^W = \underline{v}_W + \Omega(r - a) \underline{t}''(\alpha) - \dot{a} \underline{n}''(\alpha), \quad (2.34)$$

$$\underline{v}_{K'}^F = \underline{v}_F + \dot{\varphi}_F R \underline{t}'(\alpha). \quad (2.35)$$

Die Einheitsvektoren $\underline{n}'(\alpha)$ und $\underline{t}'(\alpha)$ liegen normal bzw. tangential zur Fangfläche im Punkt K' . Die Einheitsvektoren $\underline{n}''(\alpha)$ und $\underline{t}''(\alpha)$ bezeichnen die radiale bzw. tangential Richtung auf der Hülse. Sie liegen damit parallel bzw. senkrecht zum Feder–Dämpfer–Paar im Punkt K' . Die Geschwindigkeiten \underline{v}_W und \underline{v}_F des Wellen- bzw. Fanglagerpunkts sind schon aus den Gleichungen (2.10) und (2.11) bekannt.

Eine Projektion der Geschwindigkeitsdifferenz $(\underline{v}_{K'}^W - \underline{v}_{K'}^F)$ auf den lokalen Tangentialvektor $\underline{t}'(\alpha)$ liefert die gesuchte Relativgeschwindigkeit

$$v_t(\alpha) = (\underline{v}_{K'}^W - \underline{v}_{K'}^F) \underline{t}'(\alpha) \quad (2.36)$$

in tangentialer Richtung.

2.2.4 Kontaktkräfte

Die verteilte Kraft \tilde{F} im Punkt K' hängt von der Verformung a und der Verformungsgeschwindigkeit \dot{a} an dieser Stelle ab. Anders als im Bild 2.7 angedeutet, soll die Bettung keinem linearen Feder–Dämpfer–Paar, sondern der folgenden Beziehung entsprechen:

$$\tilde{F} = k_K^* a e^{(b_K^* \dot{a})} d\alpha \quad (2.37)$$

Die Parameter dieses Stoffgesetzes sind eine auf den Winkel α bezogene „Strecken–Steifigkeit“ k_K^* und der schon in Gleichung (2.18) benutzte Dämpfungsbeiwert b_K^* . Die Formulierung des Dämpfungseinflusses mit Hilfe einer Exponentialfunktion verhindert auch hier die Entstehung negativer Normalkräfte (Kleben) im Kontakt (vgl. Gl. (2.18)).

Lokale Kontaktkräfte

Das Gleichgewicht am Kontaktelement K' in radialer Richtung,

$$\tilde{F} = \tilde{N} \cos(\alpha - \beta) + \tilde{T} \sin(\alpha - \beta),$$

und ein Reibgesetz für die verteilte Tangentialkraft (siehe Bild 2.9-a)

$$\tilde{T}(\alpha) = \mu(v_t) \tilde{N}(\alpha),$$

führen auf die verteilte Normalkraft

$$\tilde{N}(\alpha) = \frac{\tilde{F}(\alpha)}{\cos(\alpha - \beta) + \mu(v_t) \sin(\alpha - \beta)}. \quad (2.38)$$

Als Reibgesetz dient die in Abschnitt 2.1.2 eingeführte Reibzahl–Kennlinie (Gl. (2.21)).

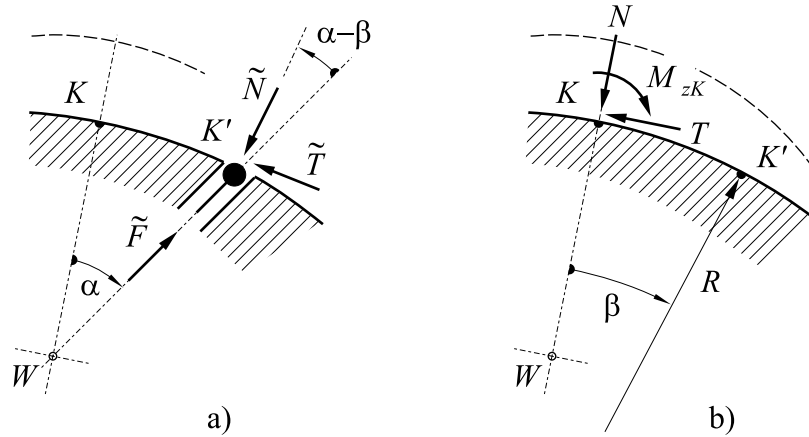


Bild 2.9: a) Die verteilten Kontaktkräfte \tilde{N} und \tilde{T} vom Fanglager auf das Kontakt-element K' stehen normal bzw. tangential zur Kontaktfläche. Die verteilte Kraft \tilde{F} der Bettung hält den Kontaktkräften das Gleichgewicht in radialer Richtung. b) Resultierende Kontaktkräfte N und T sowie Moment M_{zK} im Kontaktpunkt K .

Resultierende Kontaktreaktionen

Wir fassen nun die verteilten Kontaktkräfte zunächst zu resultierenden Reaktionen im Kontaktpunkt K zusammen und erhalten die resultierende Kontakt-Normalkraft N und Kontakt-Tangentialkraft T sowie ein Kontaktmoment M_{zK} bezüglich des Punkts K (siehe Bild 2.9-b). Sie entstehen aus Integralen über dem Kontaktgebiet $[-\alpha_G, \alpha_G]$,

$$\begin{aligned}
 N &= \int_{-\alpha_G}^{\alpha_G} [\tilde{N} \cos \beta - \tilde{T} \sin \beta] d\alpha, \\
 T &= \int_{-\alpha_G}^{\alpha_G} [\tilde{N} \sin \beta + \tilde{T} \cos \beta] d\alpha, \\
 M_{zK} &= \int_{-\alpha_G}^{\alpha_G} [R \sin \beta \tilde{N} + R(1 - \cos \beta) \tilde{T}] d\alpha,
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

mit $\beta = \beta(\alpha)$ gemäß Gleichung 2.30.

Die analytische Auswertung der Integrale führt auf längere Ausdrücke. Da wir die Bewegungsgleichungen ohnehin numerisch lösen werden, bestimmen wir die Integrale numerisch mit bis zu 21 Stützstellen. Dieses Verfahren ist ausreichend schnell und hinreichend genau.

Wie schon beim polygonförmigen Fanglager (Gleichungen (2.22) und (2.23)) werden die Kontaktkräfte des Fanglagers auf die Welle in x - und y -Komponenten zerlegt und in den Wellenmittelpunkt W verschoben. Es wirkt dann das Moment M_{zW} (siehe Bild 2.3-b)

bezüglich des Punktes W .

$$\begin{aligned} F_{xW} &= -N \cos \phi + T \sin \phi , \\ F_{yW} &= -N \sin \phi - T \cos \phi , \\ M_{zW} &= M_{zK} - T(r - \hat{a}) . \end{aligned} \tag{2.40}$$

Die Gegenkräfte F_{xF} und F_{yF} von der Welle auf das Fanglager werden in das Fanglager-Zentrum F verschoben. Hier wirkt das Moment M_{zF} auf das Fanglager.

$$\begin{aligned} F_{xF} &= -F_{xW} , \\ F_{yF} &= -F_{yW} , \\ M_{zF} &= -M_{zK} + TR . \end{aligned} \tag{2.41}$$

Die Zählrichtung der Kontaktkräfte und Momente orientiert sich am Referenzsystem.

Die schon bekannte Definition (2.24)

$$F_{FL} := \sqrt{F_{xW}^2 + F_{yW}^2}$$

liefert auch bei rundem Fanglager den Betrag der resultierenden Fanglager-Kontaktkraft.

2.3 Kontaktmodell mit finiten Elementen

Dieser Abschnitt stellt ein Kontaktmodell nach der Methode der finiten Elemente (FEM) (siehe z.B. ZIENKIEWICZ u.a. (2000), [92]) vor. Bei Modellbildung, Analyse und Auswertung wurde das FE-Programmpaket ANSYS 5.6 (ANSYS, Inc., PA, USA) eingesetzt.

Das Modell soll nicht in das Simulationsprogramm eingebunden werden; das verbieten die Rechenzeiten. Finite-Elemente-Analysen (FEA) können aber vorab eingesetzt werden, um Kennlinien zu ermitteln.

Wir entwickeln ein drei-dimensionales FE-Modell für den Kontakt einer elastischen Hülse mit einer ebenen, starren Fangfläche (siehe Bild 2.10). Die Welle wird ohne Rotation an die Fangfläche gedrückt. Dabei kann es lokal zu Haften, Gleiten oder Klaffen zwischen den Kontaktpartnern kommen. Das Modell liefert einen drei-dimensionalen Spannungszustand. Wir können daher einen *schiefen* Kontakt berücksichtigen, wie er z.B. in unseren Versuchen beim Pendelrotor auftrat. Die Wirkung einer Werkstoffdämpfung bleibt unberücksichtigt. Aus dem Modell gewinnen wir die Normalkraft-Kennlinie für den quasi-statischen Kontakt ohne Rotation.

Die Merkmale von Modell und Analyse sind im Folgenden stichwortartig aufgeführt. Die Parameter entsprechen unserem Versuch zur Messung der Normalkraft-Kennlinie (Abschnitt 6.3.1).

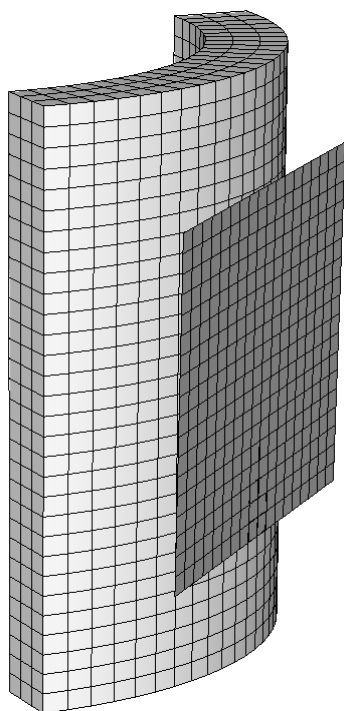


Bild 2.10: FE-Modell für den schiefen Kontakt zwischen einer elastischen Hülse und einer ebenen, starren Fangfläche. Der Innenseite der Hülse wird eine Verschiebung aufgeprägt. Die Fangfläche (im Bild rechts) ist starr aufgehängt. Die einander zugewandten Oberflächen der beiden Körper sind mit Kontaktelementen belegt (nicht sichtbar). Die Hülse ist gegenüber der Fangfläche gekippt. In der dargestellten Referenzkonfiguration berühren sich beide nur in einem Punkt (im Bild unten).

Form und Abmessungen:

- Hülse: 90°-Zylindersegment; Außendurchmesser 50 mm; Innendurchmesser 40 mm; Länge 50 mm (gemäß Parameter in Tabelle C.3).
- Fangfläche: Höhe 30 mm.
- Schiefer Kontakt: Die Hülse ist gegenüber der Fangfläche um 0,5° gekippt. In der Referenzkonfiguration berührt eine Kante der Fangfläche die Hülse in einem Punkt.
- Symmetrie: Bei schiefem Kontakt können in dem dargestellten Modell (Bild 2.10) eine, bei linienförmigem Kontakt zwei Spiegelsymmetrien ausgenutzt werden.

Diskretisierung und Kontakt:

- Hülse: 2160 Hexaederelemente und 720 Kontaktelemente auf der Mantelfläche.
- Fangfläche: 324 Kontaktelemente.
- Kontaktelemente mit Coulombscher Reibung (Reibzahl $\mu = 0.30$).

Werkstoff:

- Hülse: Gummi (45 Shore); linear-elastisches Werkstoffgesetz¹; Elastizitätsmodul $E = 2 \dots 8$ MPa und Querkontraktionszahl $\mu = 0,45$ (aus [4], S. G61).

Randbedingungen/Lasten:

- Die Verschiebungen der Fangfläche werden in allen Knoten blockiert.

¹ Wir merken an, dass die Wahl eines linear-elastischen Werkstoffgesetzes für Gummi grundsätzlich bedenklich erscheint.

- Der Innenseite der Hülse wird eine Verschiebung in Richtung der Fangfläche aufgezwungen. Die größte Eindringung erreicht einen Wert von $a_{max} = 1,5$ mm.

Lösungsverfahren:

- Bei Kontaktelementen wählt das FE-Programm einen iterativen Löser. Die Last (hier eine Verschiebung) wird in gesteuerten Schritten aufgebracht. Wir speichern die dabei auftretenden Reaktionskräfte und gewinnen daraus die Normalkraft-Kennlinie.
- Wir berücksichtigen geometrische Nichtlinearitäten.

Ergebnisse:

Mit zunehmender Last breitet sich das Kontaktgebiet aus. Ein zentraler Bereich, in dem haftender Kontakt herrscht, schiebt dabei eine ringförmige Zone mit gleitendem Kontakt vor sich her (vgl. Bild 2.11).

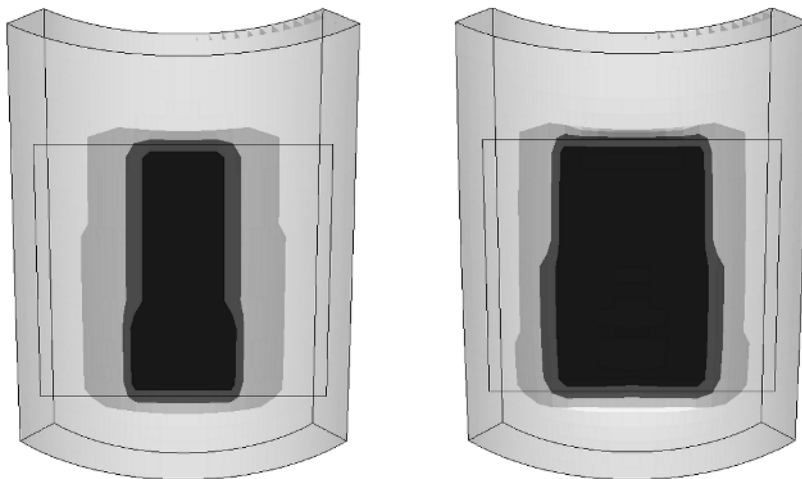


Bild 2.11: Ergebnis der FE-Analyse: Augenblicklicher Status der Kontaktelemente bei halber (links) und bei voller (rechts) Eindringung ($a_{max} = 1,5$ mm): Haften (Zentrum), Gleiten (schmales inneres Ringgebiet), kein Kontakt (außen).

Die Bilder 2.14 bis 2.16 zeigen die beim Kontakt auftretenden Verteilungen von Normal- und Reibspannung sowie des Gleitwegs. Im Zentrum des Kontaktgebiets erreicht die Flächenpressung ihren größten Wert von 3,6 MPa. Ringförmig um dieses Gebiet finden wir Reibspannungen von bis zu 0,3 MPa. Sie sind zum Zentrum hin orientiert und wirken der Querdehnung der Hülse entgegen. Dieser versteifende Einfluss entsteht gerade bei Materialien mit hoher Querkontraktionszahl wie Gummi. Der lokale Gleitweg, also die tangentielle Verschiebung der Kontaktelemente gegeneinander verteilt sich ebenfalls ringförmig und erreicht einen Wert von 0,4 mm. Auffällig ist eine wellenartige Verteilung der Kontaktgrößen in axialer Richtung. Orte mit großer Normalspannung einerseits und Orte mit großer Reibspannung und großem Gleitweg andererseits wechseln sich ab. Dies ist das Ergebnis von Haft- und Rutschvorgängen bei zunehmender Eindringung.

Die größten Beanspruchungen entstehen allerdings unterhalb der Oberfläche *in* der Hülse auf der Seite mit der größeren Eindringung (Von–Mises–Vergleichsspannungen bis 3 MPa, Bild 2.12).

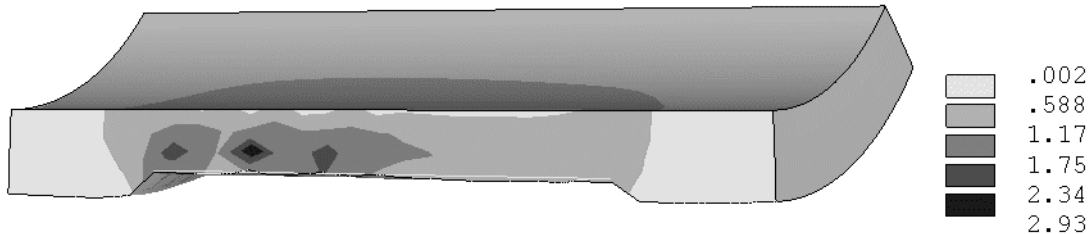


Bild 2.12: Ergebnis der FE–Analyse: Vergleichsspannungen (σ_V in MPa) nach von Mises. Längsschnitt durch die Hülse. Schiefer Kontakt mit einer Neigung von $0,5^\circ$. Die Deformationen sind maßstäblich gezeigt. Interessiert man sich für die Beanspruchungen an den Kanten, so sollte das Modell dort verfeinert werden.

Mit dem FE–Modell ermitteln wir die Normalkraft–Kennlinie $N(a)$ für die Gummihülse bei schiefem Kontakt und vergleichen sie mit gemessenen Werten (vgl. Abschnitt 6.3.1). Bei der Wahl eines Elastizitätsmoduls von $E = 4,5$ MPa im FE–Modell kann eine sehr gute Übereinstimmung mit der Messung erreicht werden (Bild 2.13). Zusätzlich nähern wir den Normalkraftverlauf mit einem Potenzgesetz gemäß Gleichung (2.19) an, wobei wir für die Parameter ($p = 2,0$ und $k_K = 3,5 \cdot 10^2 \text{ N/mm}^{2,0}$) einsetzen.

Bei gleichen Materialeigenschaften $E = 4,5$ MPa ermitteln wir die Normalkraft–Kennlinie auch für den nicht schiefen, linienförmigen Kontakt, wie er beim Laval–Rotor entsteht. Die Funktion verläuft in dem dargestellten Bereich oberhalb derer für den schiefen Kontakt (siehe Bild 2.13). Auch diesen Verlauf beschreiben wir durch ein Potenzgesetz mit angepassten Parametern ($p = 1,7$ und $k_K = 4,4 \cdot 10^2 \text{ N/mm}^{1,7}$; nicht im Bild).

Auch für eine steifere Hülse aus PVC (Elastizitätsmoduls $E = 3200$ MPa) berechnen wir mit dem FE–Modell Normalkraft–Kennlinien jeweils bei schiefem und linienförmigem Kontakt. Die Verläufe werden wiederum durch Potenzgesetze angenähert, um sie im Simulationsprogramm zu verwenden. Die identifizierten Parameter (Exponenten p und Steifigkeitsfaktoren k_K) finden sich in Tabelle C.3 im Anhang C.

Ein FE–Kontaktmodell kann sehr leicht folgende Erweiterungen erfahren:

- Berücksichtigung der Verformung beider Kontaktpartner.
- Verwendung aufwendigerer Werkstoffgesetze (nichtlinear, hyperelastisch).

In einer FE–Analyse für transiente Probleme könnten zusätzlich die Rotation der Welle und Materialdämpfung berücksichtigt werden. Es ließen sich damit Kennfelder in Abhän-

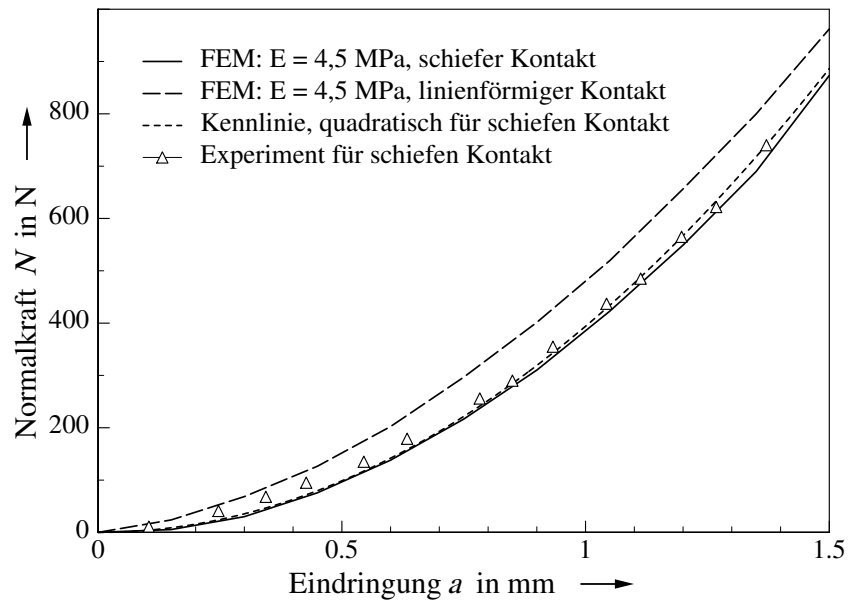


Bild 2.13: Normalkraft–Kennlinien für die Gummihülse. Ergebnisse der FE-Analyse: Bei Berücksichtigung eines schiefen Kontakts kann eine gute Übereinstimmung mit den gemessenen Werten erzielt werden. Auch eine quadratische Gleichung liefert eine gute Anpassung.

gigkeit von globaler Eindringung, globaler Eindringgeschwindigkeit und globaler Tangentialgeschwindigkeit generieren.

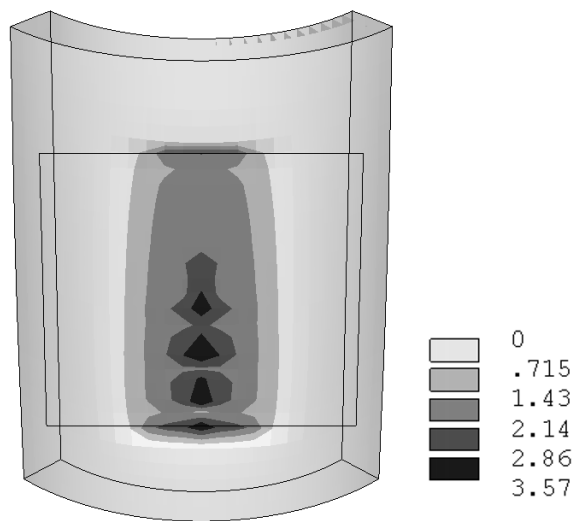


Bild 2.14: Ergebnis der FE-Analyse: Betrag der Normalspannung (in MPa). Im Bereich der größten Eindringung erreicht sie einen Wert von 3,6 MPa.

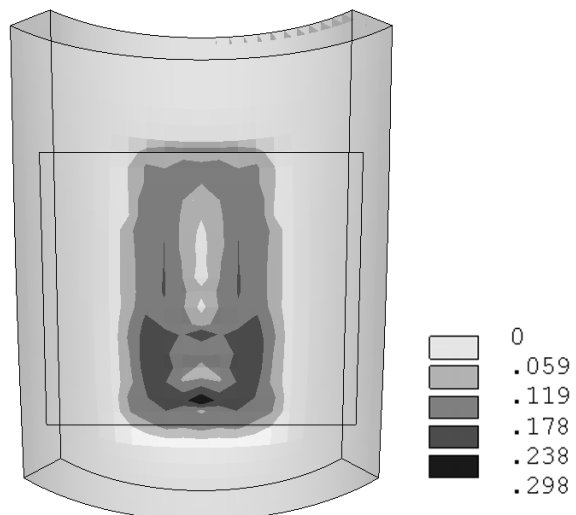


Bild 2.15: Ergebnis der FE-Analyse: Betrag der Reibspannung (in MPa). Auf der Hülsoberfläche ist die Reibspannung zum Zentrum hin orientiert und behindern so die Querdehnung. Maximum: 0,3 MPa.

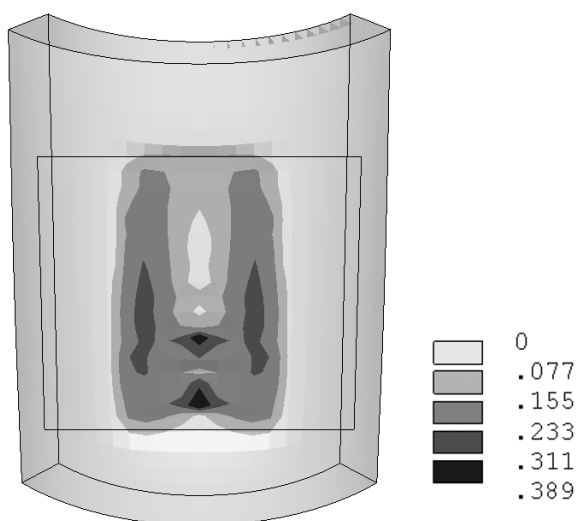


Bild 2.16: Ergebnis der FE-Analyse: Betrag des Gleitwegs (in mm). Ähnliche Verteilung wie bei der Reibspannung. Maximum: 0,4 mm.

2.4 Bewegungsgleichung des Fanglagers

Bild 2.17 zeigt das mechanische Ersatzsystem des elastisch und gedämpft aufgehängten Fanglagers, das der Modellbildung zugrunde gelegt wird.

Neben der schon getroffenen Annahme, dass der Punkt F den geometrischen Mittelpunkt beim runden Fanglager bezeichnet, fordern wir nun zusätzlich, dass er den Massenmittelpunkt des Fanglagers und den Schubmittelpunkt der nachgiebigen Aufhängung in sich vereinigt. Die Hauptrichtungen der Steifigkeit seien auch Hauptrichtungen der Dämpfung. Diese Annahmen sind nicht notwendig, vereinfachen aber die Betrachtungen. Die Fanglager unserer Experimente besaßen diese Eigenschaft.

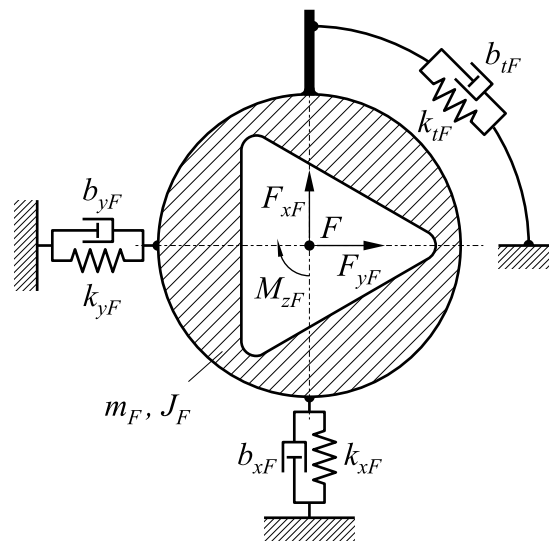


Bild 2.17: Mechanisches Ersatzsystem des elastisch gelagerten Fanglagers (Masse m_F , Massenmoment J_F um den Massenmittelpunkt F). Drei Feder–Dämpfer–Paare fesseln das Fanglager in Richtung der drei Starrkörperbewegungen x_F , y_F , φ_F (vgl. Bild 2.2). Kräfte F_{xF} , F_{yF} und Moment M_{zF} beschreiben die Wirkung der Welle auf das Fanglager.

Das Fanglager besitzt die Masse m_F und ein Massenmoment J_F um den Massenmittelpunkt F . Die Steifigkeiten k_{xF} , k_{yF} , die Drehfedersteifigkeit k_{tF} und die entsprechenden Dämpferkonstanten b_{xF} , b_{yF} und b_{tF} kennzeichnen die drei Feder–Dämpfer–Paare der nachgiebigen Aufhängung. Die Wirkungslinien der zwei translatorisch wirkenden Feder–Dämpfer–Paare des Ersatzsystems müssen für eine korrekte Modellierung durch den Schubmittelpunkt der realen Aufhängung zielen. Außer den Kräften F_{xF} , F_{yF} und dem Moment M_{zF} infolge des Kontakts sollen keine weiteren äußeren Kräfte wirken.

Mit dem Vektor \underline{q}_W der Auslenkungen der Welle und \underline{q}_F der Auslenkungen des Fanglagers,

$$\underline{q}_W = \begin{bmatrix} x_W \\ y_W \end{bmatrix}, \quad \underline{q}_F = \begin{bmatrix} x_F \\ y_F \\ \varphi_F \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

lautet die nichtlineare Bewegungsgleichung für das Teilsystem Fanglager

$$\underline{\underline{M}}_F \ddot{\underline{q}}_F + \underline{\underline{B}}_F \dot{\underline{q}}_F + \underline{\underline{K}}_F \underline{q}_F + \underline{F}_F(\underline{q}_W, \dot{\underline{q}}_W, \underline{q}_F, \dot{\underline{q}}_F) = \underline{0}. \quad (2.43)$$

$\underline{0}$ bezeichnet den Nullvektor. Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix,

$$\underline{\underline{M}}_F = \begin{bmatrix} m_F & 0 & 0 \\ 0 & m_F & 0 \\ 0 & 0 & J_F \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{B}}_F = \begin{bmatrix} b_{xF} & 0 & 0 \\ 0 & b_{yF} & 0 \\ 0 & 0 & b_{tF} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{K}}_F = \begin{bmatrix} k_{xF} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yF} & 0 \\ 0 & 0 & k_{tF} \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

besitzen Diagonalform. Der Vektor \underline{F}_F enthält die negativen resultierenden Kontaktwirkungen vom Rotor auf das Fanglager (polygonförmig: Gleichungen (2.23); rund: Gleichungen (2.41)),

$$\underline{F}_F(\underline{q}_W, \dot{\underline{q}}_W, \underline{q}_F, \dot{\underline{q}}_F) = \begin{bmatrix} -F_{xF} \\ -F_{yF} \\ -M_{zF} \end{bmatrix}.$$

Dieser stark nichtlineare Term ist auch von den Auslenkungen und Geschwindigkeiten *der Welle* abhängig. Er koppelt die Teilsysteme *Fanglager* und *Rotor* miteinander.

2.5 Bewegungsgleichung des Laval-Rotors

Die Qualität der polygonförmigen Fanglager soll an sehr einfachen Rotormodellen untersucht werden. Wir wählen den klassischen Laval-Rotor (englisch: *Laval shaft* oder *Jeffcott rotor*), da er vielen Arbeiten zum Rotor-Stator-Kontakt zugrunde liegt.

Bild 2.18 zeigt einen vertikalen Laval-Rotor (Länge 2ℓ , Masse m_W , Schwerpunkt S'). Ein Zapfen (Radius r , Mittelpunkt W) ist fest mit der Rotorscheibe verbunden und kann in einem elastisch und gedämpft aufgehängten Fanglager anschlagen.

Der Begriff Laval-Rotor impliziert bereits folgende Annahmen (vgl. [38], Kap. 3):

- Eine starre Rotorscheibe sitzt mittig und senkrecht zwischen
- zwei gleichen Lagern (A und B).
- Die Welle ist masselos und isotrop.
- Die Scheibe bewegt sich ausschließlich in einer Ebene (der Scheibenebene) senkrecht zur Welle. Die Welle biegt sich symmetrisch zur Scheibenebene. Kreiselmomente entfallen.

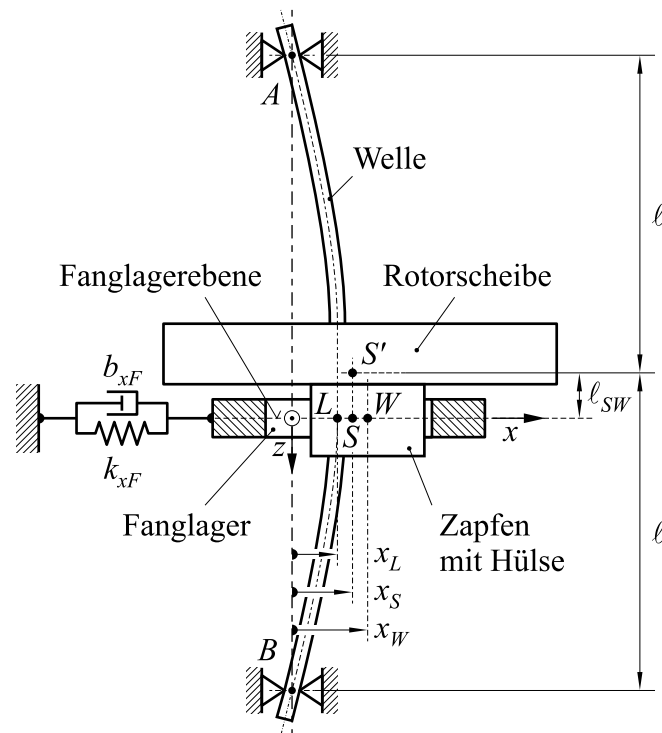


Bild 2.18: Vertikaler Laval-Rotor (Schwerpunkt S') mit Massenexzentrizität und geometrischer Exzentrizität in verformter Lage. Ein elastisch aufgehängtes Fanglager umschließt den Fanglagerzapfen (Mittelpunkt W).

Zusätzlich treffen wir folgende Modellannahmen:

- Die Lager sind starr, lassen aber Kippungen zu.
- Der Rotor steht vertikal; Gewichtseinflüsse spielen keine Rolle.
- Wir betrachten Unwucht und eine geometrische Exzentrizität des Fanglagerzapfens.
- Die Winkelbeschleunigung $\dot{\Omega} = \dot{\Omega}(t)$ werde zu jedem Zeitpunkt vorgegeben. Der Freiheitsgrad der Rotation entfällt². Es verbleiben zwei Auslenkungen, in die x - und y -Richtung, der Rotorscheibe.
- Wir vernachlässigen Kippeinflüsse, die aus dem Abstand l_{SW} zwischen Massenmittelpunkt und Fangebene herrühren.

Unter den getroffenen Annahmen kann die Rotorbewegung vollständig mit einem ebenen Modell beschrieben werden (siehe Bild 2.19). Alle am Rotor angreifenden Kräfte können mit hinreichender Genauigkeit so behandelt werden, als wirkten sie *in* der Fanglagerebene.

² Wir wollen anmerken, dass es sinnvoll sein kann, für die Rotation des Rotors und das Antriebssystem eine weitere Bewegungsgleichung einzuführen. Mit dieser Erweiterung können Torsionsschwingungen oder

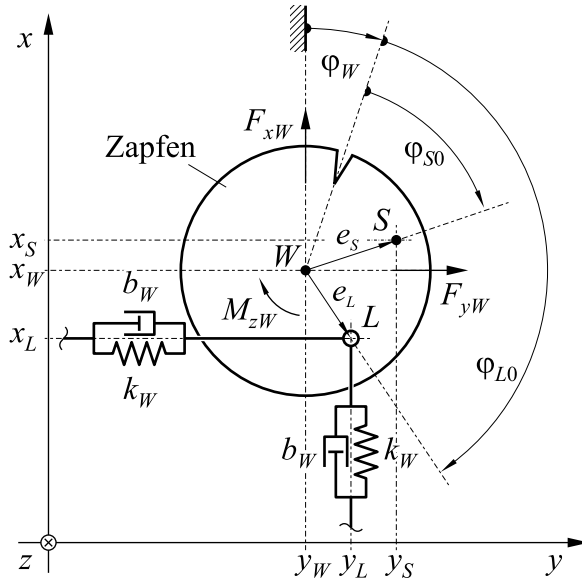


Bild 2.19: Ebenes Ersatzmodell des Laval-Rotors. Lage der Punkte W = Zapfenmittelpunkt, S = Massenmittelpunkt und L = Lagerpunkt in der Fanglagerebene. Kontaktreaktionen F_{xW} , F_{yW} und M_{zW} vom Fanglager auf den Rotor.

Die Rotation der Welle wird vom Winkel φ_W erfasst. Drehzahl Ω und Rotation φ_W können während der Lösung der Bewegungsgleichung ebenfalls durch numerische Integration bestimmt werden. Dazu müssen die Winkelbeschleunigung $\dot{\Omega}(t)$ und die Anfangsbedingungen $\Omega(t_0) = \Omega_0$, $\varphi(t_0) = \varphi_0$ gegeben sein. In unseren Simulationen beschränken wir uns auf konstante Winkelbeschleunigungen ($\dot{\Omega} = \text{const}$). Es gilt dann:

$$\begin{aligned}\Omega(t) &= \dot{\Omega} t + \Omega_0, \\ \varphi_W(t) &= \frac{1}{2} \dot{\Omega} t^2 + \Omega_0 t + \varphi_0\end{aligned}\quad (2.45)$$

In der Fanglagerebene unterscheiden wir die materiellen Punkte W , S und L des Rotors. Der Punkt W ist der schon bekannte geometrische Mittelpunkt des Zapfens. Seine Auslenkung erfassen die Koordinaten x_W und y_W . Diese Auslenkungen sind für die Beschreibung des Fanglagerkontakts erforderlich. Für sie stellen wir die Bewegungsgleichungen auf.

Der Punkt S ist die vertikale Projektion von S' (Massenmittelpunkt des Rotors) auf die Fanglagerebene. Wir wollen hier den Abstand \overline{WS} als Massenexzentrizität bezeichnen und nicht, wie es sonst üblich wäre, den Abstand \overline{LS} . Die Koordinaten

$$\begin{aligned}x_S &= x_W + e_S \cos \varphi_S, \\ y_S &= y_W + e_S \sin \varphi_S\end{aligned}\quad (2.46)$$

bezeichnen die Lage von S (und S') mit der Massenexzentrizität e_S und dem Winkel

$$\varphi_S(t) = \varphi_W(t) + \varphi_{S0}. \quad (2.47)$$

z.B. ein Hängenbleiben des Antriebs in Resonanzstellen untersucht werden.

Im Lagerpunkt L greifen die Feder–Dämpfer–Paare (Steifigkeit k_W , Dämpferkonstante b_W) an, die die Wirkung der elastischen Welle ersetzen. Der Punkt L befindet sich bei statischer Gleichgewichtslage im Ursprung des Referenzsystems. Hier durchstößt die Verbindungsgerade zwischen den Lagerpunkten A und B die Fanglagerebene. Dies ist die Definition für die Lage des Ursprungs. Bei sehr langsamen (quasi–statischen) Drehungen rotieren die Punkte W und S um den Punkt L . Die Koordinaten

$$\begin{aligned}x_L &= x_W + e_L \cos \varphi_L, \\y_L &= y_W + e_L \sin \varphi_L\end{aligned}\quad (2.48)$$

erfassen die Bewegung von L mit der geometrischen Exzentrizität e_L der Hülse und dem Winkel

$$\varphi_L(t) = \varphi_W(t) + \varphi_{L0}. \quad (2.49)$$

Aus dem Kräftegleichgewicht in x - und y -Richtung erhalten wir die nicht autonome Bewegungsgleichung

$$\underline{\underline{M}}_W \underline{\ddot{q}}_W + \underline{\underline{D}}_W \underline{\dot{q}}_W + \underline{\underline{K}}_W \underline{q}_W + \underline{F}_W(\underline{q}_W, \underline{\dot{q}}_W, \underline{q}_F, \underline{\dot{q}}_F) = \underline{u}_W(t) \quad (2.50)$$

des Teilsystems *Laval-Rotor* für den Vektor der Rotorauslenkungen \underline{q}_W gemäß Definition (2.42).

Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix,

$$\underline{\underline{M}}_W = \begin{bmatrix} m_W & 0 \\ 0 & m_W \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{D}}_W = \begin{bmatrix} b_W & 0 \\ 0 & b_W \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{K}}_W = \begin{bmatrix} k_W & 0 \\ 0 & k_W \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

besitzen Diagonalform und enthalten neben der Masse m_W des Rotors die Ersatzfederkonstante

$$k_W = \frac{6EI}{\ell^3}$$

der Welle (Biegesteifigkeit EI , Länge 2ℓ) und die Dämpfung b_W .

Der nichtlineare Vektor

$$\underline{F}_W(\underline{q}_W, \underline{\dot{q}}_W, \underline{q}_F, \underline{\dot{q}}_F) = \begin{bmatrix} -F_{xW} \\ -F_{yW} \\ -M_{zW} \end{bmatrix}.$$

enthält die negativen resultierenden Reaktionen auf den Rotor infolge des Kontakts mit dem Fanglager (polygonförmig: Gleichungen (2.22); rund: Gleichungen (2.40)).

Das zeitabhängige Glied

$$\begin{aligned}\underline{u}_W(t) &= m_W e_S \dot{\varphi}_S^2 \begin{bmatrix} \cos \varphi_S \\ \sin \varphi_S \end{bmatrix} + m_W e_S \ddot{\varphi}_S \begin{bmatrix} \sin \varphi_S \\ -\cos \varphi_S \end{bmatrix} \\ &+ b_W e_L \dot{\varphi}_L \begin{bmatrix} \sin \varphi_L \\ -\cos \varphi_L \end{bmatrix} + k_W e_L \begin{bmatrix} -\cos \varphi_L \\ -\sin \varphi_L \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (2.52)$$

auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung enthält die Fremderregungen des Rotors infolge Massenexzentrizität e_S und geometrischer Exzentrizität e_L . Mit (2.45) können wir für $\ddot{\varphi}_S = \ddot{\Omega}$ und $\dot{\varphi}_S = \dot{\varphi}_L = \Omega = \dot{\Omega}t + \Omega_0$ einsetzen. Bei konstanter Drehzahl ($\dot{\Omega} \equiv 0$) entfällt der zweite Term, außerdem ist die Erregung dann drehfrequent und harmonisch.

2.6 Bewegungsgleichung des Pendelrotors

Der zweite einfache Grundtyp einer Rotormaschine, den wir untersuchen, ist ein Pendelrotor. Der Rotor (Länge ℓ) ist frei pendelnd an einem Kardangelenke aufgehängt (Aufhängungspunkt A), von dem auch Antriebs- und Bremsmomente übertragen werden. Am unteren Ende des Rotors befindet sich ein Zapfen (Radius r , Mittelpunkt W), dessen radiale Ausschläge von einem Fanglager begrenzt werden (siehe Bild 2.20).

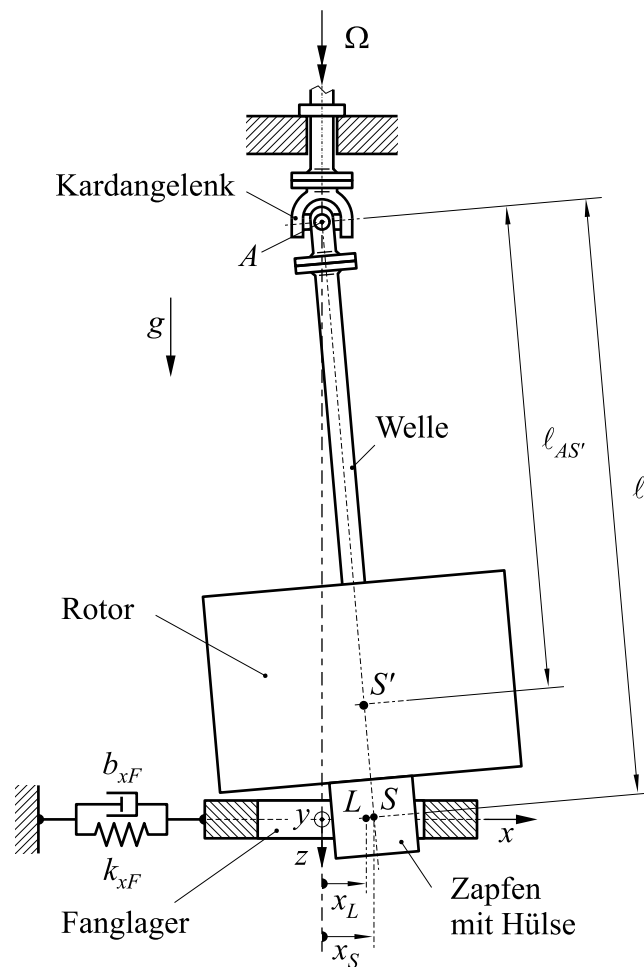


Bild 2.20: Pendelrotor (Schwerpunkt S') mit Unwucht in ausgelenkter Lage. Ein elastisch aufgehängtes Fanglager umschließt den Fanglagerzapfen (Mittelpunkt W).

Für den Rotor sollen die Annahmen eines schweren Kreisels gelten (vgl. MAGNUS (1971), [43]):

- Der starre Rotor ist symmetrisch zu einer Achse, der Figurenachse.
- Der Aufhängepunkt A liegt auf der Figurenachse.
- Schwerpunkt S' und Aufhängepunkt A haben den Abstand $\ell_{AS'}$.

Der Rotor besitzt die Masse m_R sowie die Massenmomente J_z um seine Figurenachse und J_{xA} um Achsen senkrecht zur Figurenachse durch den Punkt A .

Weiter treffen wir folgende Modellannahmen:

- Das Kardangelenک besitzt in seiner oberen Hälfte eine Exzentrizität (Bild 2.21). Der Aufhängepunkt A bewegt sich daher auf einer Kreisbahn um einen Punkt, den wir mit A' bezeichnen.
- Die radialen Auslenkungen des Zapfens sind klein gegenüber der Pendellänge ℓ (in unseren Experimenten blieb der Pendelwinkel unter 1°).
- Der Rotor dreht mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω . Diese ist deutlich höher als die Winkelgeschwindigkeiten der Pendelbewegung.

Analog zum Laval-Rotor unterscheiden wir die materiellen Punkte W , S und L des Rotors in der Fanglagerebene.

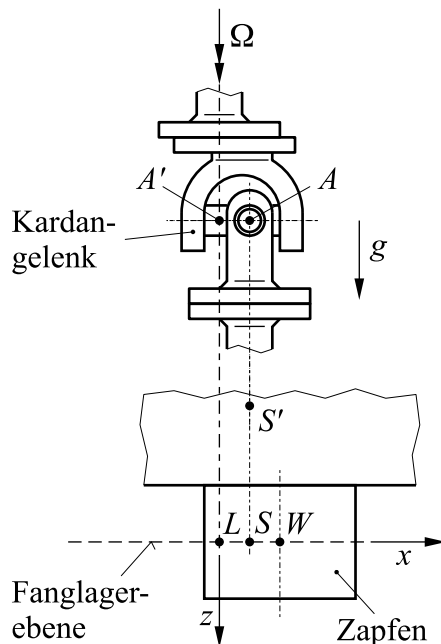


Bild 2.21: Pendelrotor an exzentrischem Kardangelenک in statischem Gleichgewicht. Lage der Punkte L , S und W in der Fanglagerebene.

Wieder bezeichnet W den Mittelpunkt des Zapfens.

In statischer Gleichgewichtslage befindet sich der Massenmittelpunkt S' des Rotors senkrecht unter dem Aufhängepunkt A , dem Zentrum des Kardangelenks. Der materielle Punkt des Rotors, der sich in gleicher Flucht ($\overline{AS'}$) in der Fanglagerebene befindet, wird mit S bezeichnet.

Senkrecht unter dem Punkt A' in der Fanglagerebene befindet sich der Ursprung des Referenzsystems. Die z -Achse weist in Richtung der Erdbeschleunigung g . Mit L wird der materielle Punkt des Rotors bezeichnet, der sich in statischer Gleichgewichtslage im Ursprung des Referenzsystems befindet.

Die Lage der Punkte S und L wird von den Koordinaten x_S, y_S bzw. x_L, y_L beschrieben. Hier gelten die Gleichungen (2.46) und (2.48) aus Abschnitt 2.5.

Mit Hilfe des **Drallsatzes** bezüglich des bewegten Führungspunkts A können wir die Bewegungsgleichung für den Pendelrotor aufstellen (siehe Anhang A, Gleichungen A.13 und A.14). Unter den getroffenen Annahmen genügt auch hier ein ebenes Rotormodell (siehe Bild 2.19). Die Auslenkungen des Pendelrotors werden eindeutig durch die Auslenkungen des Mittelpunkts W des Fanglagerzapfens angegeben.

Wir führen folgende Abkürzungen ein. Die reduzierte Masse des ebenen Modells lautet

$$m_W = \frac{J_{xA}}{\ell^2}. \quad (2.53)$$

Für Rückstellkräfte aus dem Gewicht finden wir eine Ersatzsteifigkeit

$$k_W = \frac{m_R g \ell_{AS'}}{\ell^2}. \quad (2.54)$$

Äußere Dämpfung wird durch die Dämpferkonstanten b_W angegeben. Mit der radialen Auslenkung ist eindeutig ein Kippen der Rotorachse verbunden. Die Wirkung der Kreiselmomente wird durch den gyroskopischen Term

$$g_{xy} = \frac{J_z}{\ell^2} \quad (2.55)$$

erfasst.

Als zusätzliche Vereinfachung wollen wir annehmen, dass der Fanglagerzapfen mit der Figurenachse des Rotors fluchtet. Die Punkte W und S fallen also zusammen. Diese Annahme war bei unserem Versuchsrotor in sehr guter Näherung gegeben.

Wir erhalten die nicht-autonome Bewegungsgleichung des Teilsystems *Pendelrotor*

$$\underline{\underline{M}}_W \ddot{\underline{q}}_W + \underbrace{[\underline{\underline{B}}_W + \Omega \underline{\underline{G}}_W]}_{=: \underline{\underline{D}}_W} \dot{\underline{q}}_W + \underline{\underline{K}}_W \underline{q}_W + \underline{\underline{F}}_W(\underline{q}_W, \dot{\underline{q}}_W, \underline{q}_F, \dot{\underline{q}}_F) = \underline{u}_W(t) \quad (2.56)$$

für den Vektor der Rotorauslenkungen \underline{q}_W gemäß Definition (2.42) mit Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix in Diagonalforn

$$\underline{\underline{M}}_W = \begin{bmatrix} m_W & 0 \\ 0 & m_W \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{B}}_W = \begin{bmatrix} b_W & 0 \\ 0 & b_W \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{K}}_W = \begin{bmatrix} k_W & 0 \\ 0 & k_W \end{bmatrix}$$

sowie einer antimetrischen Matrix mit dem gyroskopischen Term g_{xy}

$$\underline{\underline{G}}_W = \begin{bmatrix} 0 & g_{xy} \\ -g_{xy} & 0 \end{bmatrix}.$$

Der Vektor \underline{F}_W enthält die negativen resultierenden Lagerreaktionen auf den Rotor infolge des Kontakts mit dem Fanglager. Die Definition ist identisch zu der beim Laval-Rotor (Gl. (2.5)).

Das zeitabhängige Glied auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung enthält die Fremderregungen des Rotors auf Grund der Exzentrizität e_L (vgl. Anhang C, Gleichungen A.13 und A.14),

$$\underline{u}_W(t) = - \left[\underbrace{(m_R \ell_{AS'} / \ell + g_{xy} - m_W)}_{=: m_{Un}} \Omega^2 + k_W \right] e_L \begin{bmatrix} \cos(\Omega t + \varphi_{L0}) \\ \sin(\Omega t + \varphi_{L0}) \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

Die Abkürzung m_{Un} enthält die als Unwucht $m_{Un} e_L$ wirksame Masse. Aus den Parametern unseres Versuchsstands (Tabelle C.2) ergibt sich eine Unwucht von

$$m_{Un} e_L = 4,46 \text{ kg} \cdot 0,2 \text{ mm} = 0,89 \text{ kg mm}.$$

Die gefundene Bewegungsgleichung kann — unter besonderer Beachtung der Kreiselwirkung — als ein auf die Fanglagerebene reduziertes Ersatzsystem gedeutet werden.

2.7 Bewegungsgleichung des Gesamtsystems

Wir fassen die Auslenkungen \underline{q}_W des Rotors und \underline{q}_F des Fanglagers in einem Vektor

$$\underline{q} := \begin{bmatrix} \underline{q}_W \\ \underline{q}_F \end{bmatrix}, \quad \underline{q} \in \mathbb{R}^n,$$

der Länge n (hier: $n = 5$) zusammen.

Die Bewegungsgleichung für das Gesamtsystem

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{D}} \dot{\underline{q}} + \underline{\underline{K}} \underline{q} + \underline{F}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \underline{u}(t), \quad (2.58)$$

vereinigt die Teilsysteme *Rotor* (Laval–Rotor: Gleichung (2.50); Pendelrotor: Gleichung (2.56)) und *Fanglager* (Gl. (2.43)). Die Matrizen

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_W & 0 \\ 0 & \underline{\underline{M}}_F \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}}_W & 0 \\ 0 & \underline{\underline{B}}_F \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_W & 0 \\ 0 & \underline{\underline{K}}_F \end{bmatrix}$$

enthalten die Systemmatrizen der Teilsysteme als Untermatrizen. Die Matrix $\underline{\underline{D}}$ wird zusammen mit der Untermatrix $\underline{\underline{D}}_W$ im Fall des Pendelrotors durch Hinzutreten gyroskopischer Terme unsymmetrisch. Sonst besitzen die Matrizen eine Diagonalf orm.

Der nichtlineare Vektor

$$\underline{F}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \underline{F}_W \\ \underline{F}_F \end{bmatrix}$$

koppelt die Teilsysteme. Er enthält die Kontaktreaktionen zwischen Rotor und Fanglager.

Der zeitabhängige Term auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} \underline{u}_W(t) \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

enthält die Fremderregung $u_W(t)$ (Laval–Rotor: Gl. (2.52) oder Pendelrotor: Gl. (2.57)) des Systems in der oberen Hälfte des Vektors.

Sonderfälle

In der Bewegungsgleichung sind u.a. folgende Sonderfälle enthalten:

Rotor mit starr aufgehängtem Fanglager

Für den Sonderfall eines Rotors in einem *starr* aufgehängten Fanglager ($q_F \equiv \underline{0}$) reduziert sich die Bewegungsgleichung des Gesamtsystems (2.58) auf die Bewegungsgleichung für das Teilsystem Rotor (Gl. (2.50) oder (2.56))

$$\underline{\underline{M}}_W \ddot{q}_W + \underline{\underline{D}}_W \dot{q}_W + \underline{\underline{K}}_W q_W + \underline{F}_W(q_W, \dot{q}_W, \underline{0}, \underline{0}) = \underline{u}_W(t), \quad (2.59)$$

wobei im Vektor \underline{F}_W der Kontaktreaktionen die Auslenkungen q_F und Geschwindigkeiten \dot{q}_F des Fanglagers null zu setzen sind.

Schneller Kreisel ohne Rückstellkraft

Entfällt in der Gleichung für den Pendelrotor (2.56) die Fesselung ($k_W = 0$), so wird ein schneller Kreisel beschrieben, den man ohne den Kontakt zu den Fangflächen als *kräftefrei*

bezeichnen würde. Ein so genannter Kurvenkreisel, bei der die Kreiselachse an einer starren Kurve entlang fährt (*gyroscopic tracking*), ist als Sonderfall in dieser Bewegungsgleichung enthalten (vgl. [44], [46]). Siehe Simulation (Bild 5.3).

Rotor ohne Fanglager

In unserem Modell ist natürlich auch der Sonderfall eines Rotors ohne Fanglagerkontakt enthalten. In diesem Fall verschwinden die Kontaktkräfte ($\underline{F}_W \equiv \underline{0}$) und wir erhalten ein inhomogenes System *linearer* Differentialgleichungen. Bei konstanter Drehzahl oder konstanter Drehbeschleunigung kann die Lösung analytisch angegeben werden.

Kapitel 3

Numerisches Lösen der Bewegungsgleichung

In diesem Kapitel stellen wir die numerischen Verfahren vor, mit denen wir die Bewegungsgleichung (2.58) des Gesamtsystems aus Rotor und Fanglager lösen.

Die Bewegungsgleichung (2.58) beschreibt das System über die u.U. stoßartigen Kontakte hinweg in stetiger Weise. Sie ist somit stark nichtlinear und kann im Allgemeinen nicht geschlossen gelöst werden. Wir müssen ein Näherungsverfahren heranziehen. Die bekannten analytischen Näherungsverfahren sind hier ungeeignet. Sie lassen nur eine *schwache* Nichtlinearität zu oder beschränken die Gültigkeit ihrer Lösung auf kleine Zeitintervalle (vgl. FISCHER und STEPHAN (1972), [18], Abschnitt 5.6.2). Wir wählen daher ein *numerisches* Näherungsverfahren.

Äquivalentes System erster Ordnung

Die gängigen numerischen Verfahren und verfügbaren Routinen zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen setzen ein Differentialgleichungssystem *erster* Ordnung voraus.

Die Bewegungsgleichung (2.58) für das Gesamtsystem mit n Freiheitsgraden

$$\underline{\underline{M}} \underline{\ddot{q}} + \underline{\underline{D}} \underline{\dot{q}} + \underline{\underline{K}} \underline{q} + \underline{F}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \underline{u}(t), \quad \underline{q} \in \mathbb{R}^n,$$

ein System von n Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wird in ein äquivalentes System von $2n$ Differentialgleichungen *erster* Ordnung umgeschrieben:

Der Zustandsvektor \underline{z} fasst dazu Auslenkungen \underline{q} und Geschwindigkeiten $\underline{\dot{q}}$ zusammen:

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{\dot{q}} \end{bmatrix}, \quad \underline{\dot{z}} = \begin{bmatrix} \underline{\dot{q}} \\ \underline{\ddot{q}} \end{bmatrix}, \quad \underline{z} \in \mathbb{R}^{2n}$$

Wir setzen die Invertierbarkeit der Massenmatrix voraus ($\det \underline{\underline{M}} \neq 0$), fügen eine Identität (hier: $\underline{\dot{q}} = \underline{\dot{q}}$) hinzu und erhalten ein nichtlineares nicht autonomes System erster Ordnung

$$\dot{\underline{z}} = \underline{f}(\underline{z}, t) = \underline{\underline{A}} \underline{z} + \underline{\tilde{F}}(\underline{z}) + \underline{\tilde{u}}(t) \quad (3.1)$$

mit der konstanten $(2n \times 2n)$ -Matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ -\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} & -\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{D}} \end{bmatrix},$$

der nichtlinearen Funktion $\underline{\tilde{F}}$ und dem zeitabhängigen Term $\underline{\tilde{u}}$:

$$\underline{\tilde{F}}(\underline{z}) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{F}}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) \end{bmatrix}, \quad \underline{\tilde{u}}(t) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{u}(t) \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{0}}$ bezeichnet die $(n \times n)$ -Null- und $\underline{\underline{1}}$ die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix.

3.1 Integration des Anfangswertproblems

Für *gewöhnliche* Differentialgleichungen

$$\dot{\underline{z}} = \underline{f}(\underline{z}, t)$$

gilt ein **Existenz- und Eindeigkeitssatz** bekannt (vgl. z.B. SMIRNOW (1986), [75]).

Zu einer gegebenen Anfangsbedingung

$$\underline{z}(t_0) = \underline{z}_0 \quad (3.2)$$

existiert eine Lösung $\underline{z}(t)$ innerhalb eines Gebiets, wenn die Funktion \underline{f} hier stetig verläuft. Die Lösung kann vom Anfangspunkt (t_0, \underline{z}_0) nach beiden Seiten bis zum Rand des Gebiets verfolgt werden. Ist \underline{f} darüberhinaus stetig differenzierbar, so ist die Lösung eindeutig. Für unsere Bewegungsgleichung (3.1) heißt das, dass die Kennlinien der Kontaktkräfte stetig und stetig differenzierbar sein sollten, so wie es im Abschnitt 2.1.2 eingeführt wurde.

Wir lösen das Differentialgleichungssystem (3.1) durch numerische Integration mit einem **Runge–Kutta–Verfahren** fünfter Ordnung mit Schrittweitensteuerung. Hierzu wurden entsprechende Routinen aus einer numerischen Bibliothek (`odeint` und `rkqs` aus PRESS u.a. (1992), [67]) in die Simulationsprogramme eingebunden.

Wie bei jedem numerischen Verfahren wird die Lösung nur zu diskreten Zeitpunkten t_i mit $i = 0, 1, 2, \dots$ bestimmt. Sind die Zustandsgrößen zu einem beliebigen Zeitpunkt bekannt $\underline{z}_i = \underline{z}(t_i)$, so kann eine Schätzung der Zustandsgrößen für den nächsten Zeitpunkt $t_{i+1} = h_i + t_i$ (Schrittweite h_i) erfolgen:

$$\underline{z}_{i+1} \approx \underline{z}_i + h_i \dot{\underline{z}}_i = \underline{z}_i + h_i \underline{f}(\underline{z}_i, t_i) \quad (3.3)$$

Dies ist ein Integrationsschritt des einfachen Euler–Verfahrens. Beim verwendeten Runge–Kutta–Verfahren fünfter Ordnung wird die Funktion f für jeden Schritt sechsmal ausgewertet, wobei jede Auswertung die Ergebnisse der vorherigen Auswertungen berücksichtigt. Die Schätzung z_{i+1} setzt sich schließlich aus einer Linearkombination der sechs Auswertungen und des alten Funktionswerts z_i zusammen. Aus dem Vergleich mit einer zweiten Schätzung z_{i+1}^* , die aus einer anderen Linearkombination entsteht, kann der Fehler überschlagen und der nächste Zeitschritt h_{i+1} bestimmt werden (Schrittweitensteuerung nach FEHLBERG, Linearfaktoren nach CASH und KARP; vgl. [67]).

Bei einem harten Kontakt ändert sich der Bewegungszustand des Systems in sehr kurzer Zeit gravierend, während anderer Phasen dagegen nur langsam. Die Schrittweitensteuerung passt sich diesen Bedingungen an und ermöglicht so eine effiziente Integration. Problematisch kann es werden, wenn die Stöße eine hochfrequente Bewegung anregen, die sich über längere Zeit den tieffrequenten Bewegungen überlagert. Man spricht von einem *steifen* Differentialgleichungssystem. Zur Lösung werden *implizite* Integrationsverfahren empfohlen, die dann schneller und stabiler arbeiten (vgl. [67]). Bei unseren Simulationsrechnungen hat die Verwendung eines impliziten Verfahrens nach ROSENBROCK (Routine `stiff` aus [67]) keine Vorteile erbracht.

Führt die numerische Integration auf periodische Lösungen, so sind diese auch immer stabil.

3.2 Schießverfahren zum Auffinden periodischer Lösungen bei autonomen und bei periodischen Differentialgleichungen

Wir nutzen ein Schießverfahren, um bei autonomen und bei periodischen Bewegungsgleichungen gezielt nach periodischen Bewegungen zu suchen (vgl. WALLISCH u. HERMANN (1985), [84]). Die Integration des Anfangswertproblems kann bei langen Einschwingphasen viel Zeit in Anspruch nehmen. Ein Schießverfahren ist oft schneller. Die ermittelten periodischen Bewegungen sind u.U. instabil. Die Stabilität kann mit einer anschließenden Integration als Anfangswertproblem über einige Perioden numerisch überprüft werden.

Mit beliebigen aber fest vorgegebenen $2n$ Anfangswerten

$$\underline{z}(t_0) = \underline{z}_0 = \begin{bmatrix} z_{01} \\ \vdots \\ z_{0n} \\ z_{0n+1} \\ \vdots \\ z_{02n} \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

die so sortiert seien, dass die erst n Elemente Auslenkungen und die zweiten n Elemente Geschwindigkeiten des zugeordneten mechanischen Systems bezeichnen, existiert eine eindeutige Lösung der Bewegungsgleichung (3.1):

$$\underline{z}(t) = \underline{g}(\underline{z}_0, t_0, t) \quad (3.5)$$

Die Funktion \underline{g} steht für die numerisch gewonnene Lösung der Bewegungsgleichung. Die Forderung nach Periodizität der Lösung mit der Periodendauer T

$$\underline{z}(t+T) \stackrel{!}{=} \underline{z}(t) \quad \forall t, \quad (3.6)$$

speziell für $t = t_0$

$$\underline{z}(t_0+T) \stackrel{!}{=} \underline{z}(t_0) = \underline{z}_0 \quad (3.7)$$

stellt ein Randwertproblem dar. Mit (3.7) folgt aus (3.5) ein System von $2n$ nichtlinearen, nur numerisch erzeugten Bestimmungsgleichungen

$$\underline{g}(\underline{z}_0, t_0, t_0+T) - \underline{z}_0 = \underline{0} \quad (3.8)$$

für $2n+2$ Unbekannte ($2n$ Anfangswerte \underline{z}_0 , der Anfangszeitpunkt t_0 und die Periodendauer T). Das vorliegende Randwertproblem lässt sich nur eindeutig lösen, wenn zwei zusätzliche Nebenbedingungen angegeben werden.

Die **erste Nebenbedingung** treffen wir zu einer der Zustandsgrößen. Bei mechanischen Systemen müssen die Geschwindigkeiten einer periodischen Bewegung Nulldurchgänge aufweisen. Einer der Anfangswerte aus der unteren Hälfte des Vektors \underline{z}_0 , der im mechanischen System eine Anfangsgeschwindigkeit bezeichnet, könnte also ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf Null gesetzt werden, $z_{0k} = 0$, $k \in \{n, \dots, 2n\}$.

Diese sonst übliche Wahl erweist sich jedoch bei unserem System als ungünstig, da es in der Regel die kurzen Kontaktphasen sind, in denen die Geschwindigkeiten Nulldurchgänge aufweisen (vgl. Phasendiagramm Bild 3.1). An diesen Stellen finden wir die größten Beschleunigungen. Die Zustandsgrößen haben die größten Gradienten und die Bestimmungsgleichungen reagieren sehr empfindlich auf kleine Variationen der gesuchten Anfangsbedingungen. Das iterative Lösungsverfahren verliert an numerischer Stabilität. Wir wählen

daher eine andere Vorgehensweise und geben einer der Anfangswerte aus der oberen Hälfte des Vektors z_0 — eine Auslenkung im mechanischen System — einen kleinen, von Null verschiedenen Wert vor,

$$z_{0k} \neq 0, \quad k \in \{1, \dots, n\}, \quad (3.9)$$

von dem wir annehmen, dass er bei der periodischen Bewegung durchlaufen wird. Diese Vorgabe verhindert weiter, dass das numerische Verfahren die trivialen Anfangswerte $z_0 = \underline{0}$ findet, die auf die triviale Lösung $z(t) \equiv \underline{0}$ führen.

Bei der **zweiten Nebenbedingung** müssen wir unterscheiden, ob die Differentialgleichung autonom oder nicht autonom ist.

Autonome Differentialgleichung

Eine *autonome* Differentialgleichung liegt bei fehlender Fremderregung des Systems vor:

$$\dot{z} = f(z) = \underline{A}z + \underline{\tilde{F}}(z).$$

Hier kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Anfangszeit beliebig gewählt werden, z.B.

$$t_0 = 0. \quad (3.10)$$

Als Unbekannte verbleiben $2n - 1$ Anfangswerte z_{0k} und die Periode T . Bei der Lösung bleibt zu prüfen, ob die berechnete Periode T nicht ein ganzes Vielfaches einer kleinsten Periode ist.

Beispiel

Bild 3.1 zeigt ein Ergebnis des Schießverfahrens für eine autonome Differentialgleichung: Laval-Rotor ohne Unwucht in einem dreiseitigen, starr aufgehängten Fanglager.

Eine Anfangsauslenkung und die Anfangszeit werden fest vorgegeben.

$$z_{02} = y_0 = -0,10 \text{ mm}, \quad t_0 = 0.$$

Nach 81 Iterationsschritten liefert das Verfahren die übrigen drei Anfangswerte und die Periode,

$$\begin{aligned} z_{01} &= x_0 = 2,99 \text{ mm}, \\ z_{03} &= \dot{x}_0 = -0,037 \text{ m/sec}, \\ z_{04} &= \dot{y}_0 = -0,144 \text{ m/sec}, \quad T = 0,158 \text{ s}, \end{aligned}$$

die zu einer *einschleifigen* periodischen Lösung gehören.

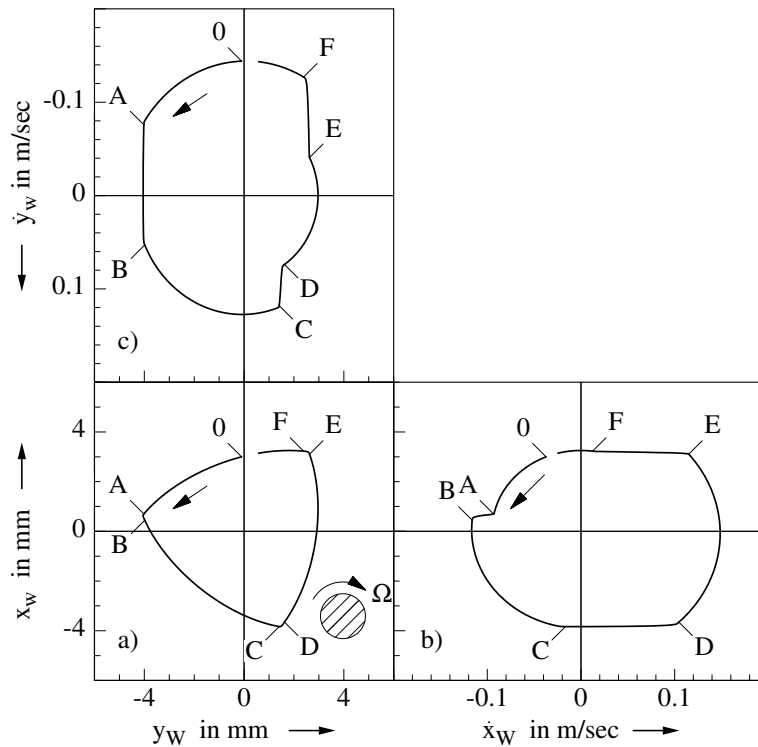


Bild 3.1: Ergebnis des Schießverfahrens für eine autonome Differentialgleichung: Periodische Bewegung des Laval-Rotors ohne Unwucht in dreiseitigem Fanglager. Zapfenbahn: (a) $x(y)$. Phasendiagramme: (b) $x(\dot{x})$ und (c) $\dot{y}(y)$. Die Geschwindigkeitsachsen der Diagramme sind so orientiert, dass alle Kurven gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen werden. Punkt 0: vom Schießverfahren ermittelter Startpunkt. Kontaktbeginn bei A, C, E. Kontaktende bei B, D, F. Es sind nur 97 % der vollen Periode dargestellt. (Parameter wie bei Rechnung zu Bild 4.3).

Periodische Differentialgleichung

Eine *nicht autonome* Differentialgleichung liegt bei Unwucht oder Exzentrizität des Rotors vor. Eine periodische Bewegung ist nur denkbar, wenn auch das zeitabhängige Glied in (3.1) periodisch ist. Wir nehmen eine konstante Drehzahl ($\Omega = \text{const}$) an. Die Erregung ist dann periodisch sowie darüber hinaus harmonisch und drehfrequent,

$$\tilde{u}(t + T_u) = \tilde{u}(t), \quad T_u = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

Wir geben die Periode T der Lösung als ganzzahliges Vielfaches von T_u fest vor,

$$T = m T_u = m \frac{2\pi}{\Omega}, \quad m \in \mathbb{N}^+, \quad (3.11)$$

und suchen mit der Wahl von m gezielt nach drehfrequenten ($m = 1$) oder subharmonischen ($m > 1$) Bewegungen. Neben drei Anfangswerten z_{k0} ist es diesmal der Anfangszeitpunkt t_0 , den es zu bestimmen gilt. Dies entspricht der Bestimmung der Phasenlage der Rotor-schwingung gegenüber der Erregung.

Damit sind es $2n$ Bestimmungsgleichungen für $2n$ Unbekannte. Wir lösen die Bestimmungsgleichungen iterativ mit einem modifizierten Newton-Verfahren (`newt` aus PRESS u.a. (1992), [67]). Diesem Verfahren wird eine globale Konvergenz zugeschrieben. Dennoch ist nach unseren Erfahrungen die Stabilität und der Erfolg des Verfahrens stark von der Wahl der Startwerte abhängig. Die gesuchten Größen sind Auslenkungen, Geschwindigkeiten und Zeiten. Hier hat sich gezeigt, dass eine Normierung der gesuchten Größen auf angemessene Bezugsgrößen für die Güte und Stabilität des Verfahrens sehr vorteilhaft ist.

Es sei angemerkt, dass innerhalb des Randwertproblems zur Bestimmung der Funktion g und zur numerischen Bestimmung der Jacobi-Matrix für das Newton-Verfahren das eingebettete Anfangswertproblem sehr häufig gelöst werden müssen.

3.3 Realisierung und Ablauf der Simulationsprogramme

Die numerische Integration des vorliegenden Anfangswertproblems ist zeitkritisch. Das gilt insbesondere dann, wenn wir das Kontaktmodell für die runden Fanglager (Abschnitt 2.2) mit Berücksichtigung der Rollreibung einbinden. Hier müssen bei jeder Auswertung der rechten Seite der Differentialgleichung die Integrale (2.39) über dem Kontaktgebiet ausgewertet werden.

Wir programmieren das Simulationsmodell in der Programmiersprache C, da hier ein schneller, zeitoptimierter Code generiert wird. In das Programm sind die oben genannten Standard-Routinen aus einer numerischen Bibliothek eingebunden.

Nach dem Start liest das Programm Systemparameter, Steuergrößen und die Anfangsbedingungen aus einer Parameter-Datei ein (siehe Flussdiagramm Bild 3.2). Die folgende numerische Integration läuft in festen Zeitschritten bis zum gewünschten Ende der Simulation. Diese *Macro-Schritte* dienen der Ausgabe der Zustandsgrößen zu einstellbaren, äquidistanten Zeitpunkten. In jedem Zeitschritt wird die Integrations-Routine aufgerufen. Sie bestimmt den Zustandsvektor für einen neuen Zeitpunkt. Dazu wählt die Routine innerhalb der Makro-Schritte automatisch weitere Subschritte, die *Runge-Kutta-Schritte*, von unterschiedlicher Größe. In jedem Subschritt wird eine Subroutine mit der programmierten Bewegungsgleichung mehrmals aufgerufen. Diese wiederum ruft eine weitere Subroutine auf, die das Kontaktmodell enthält. Am Ende eines Makro-Schritts werden die aktuellen Zustandsgrößen in eine Zeile einer Ergebnis-Datei geschrieben. Dann folgt der nächste Makro-Schritt der äußeren Zeitschleife.

Je nach Rotortyp (Laval-Rotor oder Pendelrotor) sowie Fanglagerform (polygonförmig oder rund) werden unterschiedliche Subroutinen eingebunden. Bei der Simulation von Re-

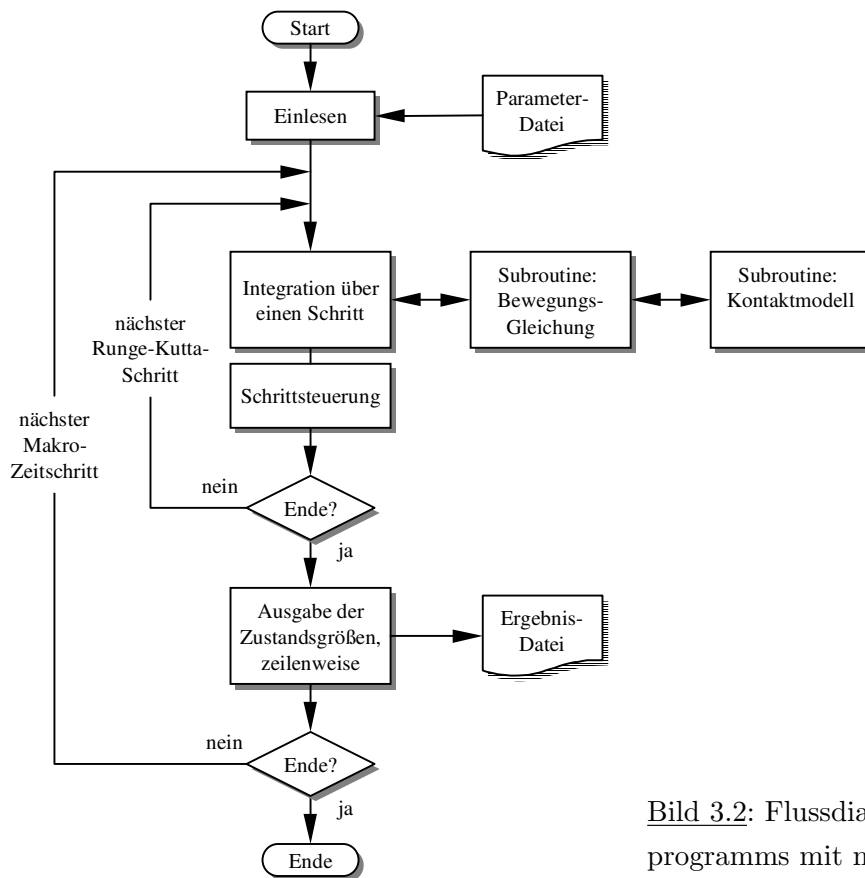


Bild 3.2: Flussdiagramm des Simulationsprogramms mit numerischer Integration.

sonanzdurchfahrten wird der Subroutine mit der Bewegungsgleichung eine Routine für die Drehzahl- und die Winkel-Zeit-Funktion hinzugefügt. Zu jedem Zeitpunkt wird dann die aktuelle Drehzahl und der Zustand des Rotors berechnet.

Für einen Rotor mit *elastisch* aufgehängtem Fanglager wurde eine eigenständige Erweiterung des beschriebenen Simulationsprogramms angefertigt. Für das Programm zur Bestimmung der Bifurkationsdiagramme wird um das beschriebene Simulationsprogramm herum eine weitere Schleife gelegt, in der ein Parameter, der Bifurkations-Parameter schrittweise verändert und dann die Simulation ausgeführt wird. Beim Programm für das Schießverfahren wird innerhalb des Randwertproblems das enthaltene Anfangswertprobleme sehr häufig mit sich ändernden Anfangswerten gelöst. Die typische Anzahl von Integrationsritten und die benötigten Rechenzeiten sind beispielhaft für einige Rechnungen in Tabelle 3.1 angegeben.

Tabelle 3.1: Anzahl der Integrationsschritte und Rechenzeiten bei einigen ausgewählten Rechnungen.

<i>Rechnung</i>	<i>Echtzeit</i>	<i>Stöße</i>	<i>Subschritte</i>	<i>Rechenzeit</i> ¹	<i>Beispiel</i>
Period. Beweg., polyg. FL	2 sec	10	$2,0 \cdot 10^4$	10 sec	Bild 4.3
Period. Beweg., elast. gel. FL	0,2 sec	3	$1,7 \cdot 10^4$	4 sec	Bild 4.25
Period. Beweg., rundes FL	2 sec	3	$3,0 \cdot 10^4$	20 sec	Bild 4.6
Schießverfahren (81 Iterationen)	unbekannt	unbekannt	$1,3 \cdot 10^5$	200 sec	Bild 3.1
Resonanzdurchlauf	120 sec	55	$2,0 \cdot 10^6$	300 sec	Bild 4.32
Bifurkationsdiagramm	400 sec	300	$1,0 \cdot 10^7$	2000 sec	Bild 5.4

¹ Rechenzeiten auf einer *Intel*-basierten Workstation mit 650 MHz

3.4 Wahl der Systemparameter

Für die Simulationsrechnungen wählen wir bevorzugt solche Systemparameter, die unseren Experimenten entsprechen. Diese *Standard*-Parameter sind im Anhang C in Tabellen zusammengestellt.

Es existieren Parametersätze für die beiden Rotortypen:

- Laval-Rotor in Tabelle C.1
- Pendelrotor in Tabelle C.2

Verschiedene Standardparameter für Unwucht und Exzentrizität sind in den Tabelle der Rotortypen zu finden. Für das Kontaktmodell (Normalkraft- und Reibzahl-Kennlinie) stehen zwei Parametersätze zur Verfügung. Sie entsprechen zwei Hülsen, die wir in den Experimenten verwendet haben:

- Eine steifere Hülse aus Hart-PVC in Tabelle C.3
- Eine weichere Hülse aus Gummi in Tabelle C.4

Im Experiment standen uns zwei Fanglager in Form regelmäßiger Polygone und ein rundes Fanglager zur Verfügung. Die Fanglager wurden entweder sehr steif am Rahmen des Versuchsstands oder elastisch mit Hilfe von Gummifedern aufgehängt:

- Dreiseitiges Fanglager in Tabelle C.6
- Viereitiges Fanglager in Tabelle C.7
- Rundes Fanglager in Tabelle C.8
- Elastische Aufhängung der Fanglager in Tabelle C.5

Zu den Rechnungen geben wir an, welche *Standard*-Parametersätze verwendet wurden. Dort, wo wir davon abweichende Parameter einsetzen, werden diese explizit angegeben.

Kapitel 4

Numerische Ergebnisse zum Laval–Rotor

In diesem Abschnitt zeigen wir numerische Ergebnisse für die Bewegung eines Laval–Rotors in einem Fanglager (Modell nach Abschnitt 2.5, Bewegungsgleichung (2.58), Parameter aus Tabelle C.1).

4.1 Bewegungen ohne Fanglagerkontakt

Zunächst betrachten wir die Bewegungen des Laval–Rotors ohne Fanglagerkontakt. In diesem Sonderfall ist die Bewegungsgleichung linear.

Bei konstanter Drehzahl ($\Omega = \text{const}$) liegt eine harmonische, drehfrequente Erregung $u(t)$ vor. Die analytische Lösung ist bekannt (siehe z.B. HOLZWEISSIG u. DRESIG (1992), [27], Abschnitt 5.2.1). Nach einer Einschwingphase stellt sich eine periodische Bewegung, eine *erzwungene* Schwingung ein.

Diese Bewegung ist dadurch gekennzeichnet, dass alle Punkte der Welle in der betrachteten Ebene auf Kreisbahnen mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um den Koordinatenursprung umlaufen (*synchroner Gleichlauf*).

Es ist bekannt, dass sich die größten Auslenkungen in der Nähe der kritischen Drehzahl $\Omega_{krit} = \omega_0 = \sqrt{k_W/m_W}$ einstellen. Bei einer quasi–statischen Rotation mit sehr kleinen Drehzahlen ($\Omega \ll \omega_0$) befindet sich der Lagerpunkt L im Ursprung. Um ihn kreisen die Punkte W und S . Für sehr hohe, überkritische Drehzahlen ($\Omega \gg \omega_0$) nähert sich der Massenmittelpunkt S immer weiter dem Ursprung an, wobei die Punkte W und L auf Kreisbahnen umlaufen. Bei der kritischen Drehzahl laufen die Punkte L und S mit ähnlich großem Radius um. Der Punkt L eilt dem Punkt S nach (vgl. Bild 2.19).

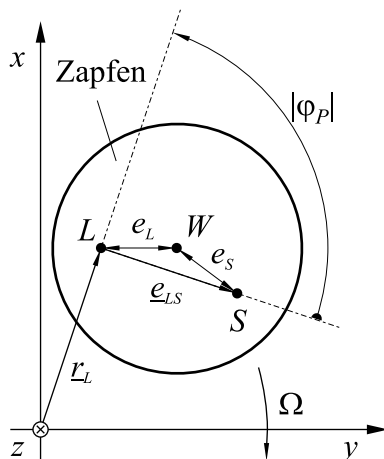


Bild 4.1: Synchroner Gleichlauf: Alle Punkte des Rotors bewegen sich mit der Winkelgeschwindigkeit Ω auf Kreisbahnen um den Ursprung. Bei der kritischen Drehzahl erreicht der Phasenwinkel φ_P einen Wert von $-\pi/2$. Der Lagerpunkt L eilt dem Massenmittelpunkt S nach.

Für den Phasengang betrachten wir den Winkel φ_P zwischen dem Ortsvektor r_L des Punktes L und dem Vektor e_{LS} von L nach S . Wir finden den üblichen Phasenwechsel von 0 auf $-\pi$ beim Durchgang durch die kritische Drehzahl (siehe Bild 4.2).

Transiente Resonanzdurchläufe berechnen wir mit dem Simulationsprogramm. Für den gleichmäßig beschleunigten An- und Auslauf ($\dot{\Omega} = \text{const}$) ohne Rotor–Stator–Kontakt sind auch geschlossene Lösungen bekannt (MARKERT, PFÜTZNER und GASCH (1977) [48]).

Bild 4.2 zeigt neben der stationären Resonanzkurve einen simulierten An- und Auslauf des Laval–Rotors ohne Fanglager bei konstanten Winkelbeschleunigungen $\dot{\Omega}/2\pi = \pm 0,20$ Hz/sec (Höchstzahl $\Omega_{max}/2\pi = 10$ Hz). Deutlich erscheinen drei charakteristische Merkmale für den transienten Resonanzdurchlauf, die von MARKERT (1996), [47] formuliert wurden:

- Die maximale Auslenkung ist stets kleiner als im stationären Fall.
- Die maximale Auslenkung erscheint nicht bei Erreichen der kritischen Drehzahl, sondern zeitlich später.
- Die Resonanzdurchfahrt stößt Eigenschwingungen an, die sich nach der maximalen Auslenkung der erzwungenen Schwingung überlagern.

Diese Merkmale treten um so stärker auf, je schneller die Resonanzstelle durchfahren wird. In unserem Beispiel erkennen wir noch die geometrische Exzentrizität $\rho_W(0) = |e_L| = 0,10$ mm und die Massenexzentrizität $\rho_W(2\omega_0) \approx \rho_W(\infty) = |e_S| = 0,16$ mm. Am Beginn der Simulationen links und rechts im Bild erscheinen — insbesondere im Phasengang sichtbar — Eigenschwingungen vom Anfahren.

Für ein sicheres Durchfahren einer Resonanzstelle ist ein genügend hohes Antriebs- oder Bremsmoment erforderlich (vgl. MARKERT (1980), PFÜTZNER und GASCH [49]).

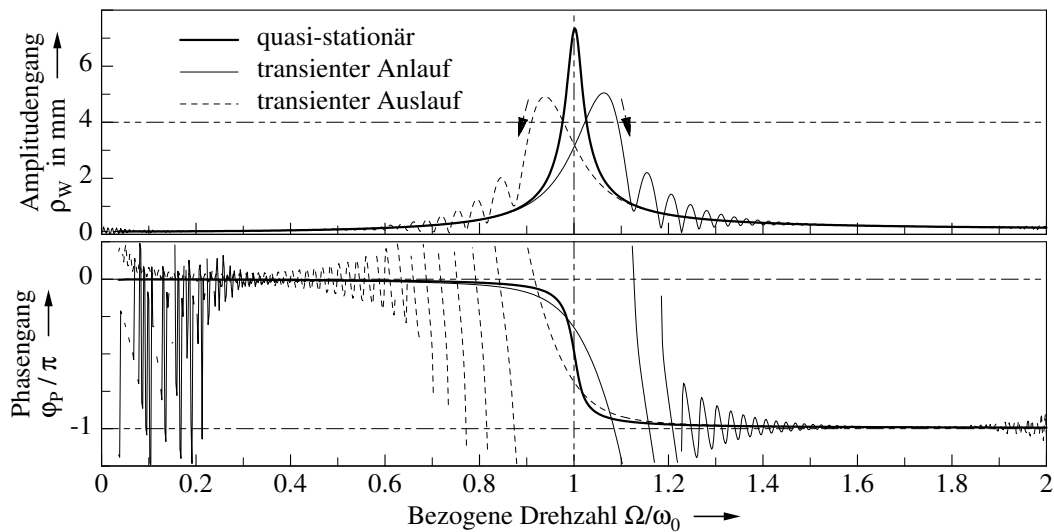


Bild 4.2: Amplituden- und Phasengänge beim Resonanzdurchlauf. Quasi-stationärer, Durchlauf sowie transienter, gleichmäßig beschleunigter An- und Auslauf in jeweils 50 sec ($\dot{\Omega}/2\pi = \pm 0,20$ Hz/sec). Bei einer radialen Auslenkung von $\rho = 4$ mm würde der Rotor in unseren Versuchen auf das Fanglager treffen. (Laval-Rotor, Massenexzentrizität $e_S = 0,16$ mm, geom. Exzentrizität $e_L = 0,10$ mm, Eigenfrequenz $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; ohne FL).

4.2 Periodische Bewegungen in starr aufgehängten Fanglagern

Zunächst halten wir die Drehzahl fest ($\Omega = \text{const}$) und untersuchen die Bewegungen des Laval-Rotors ohne Unwucht beim Kontakt mit verschiedenen Fanglagerformen. Die Anfangsbedingungen, werden so gewählt, dass ein erster Kontakt zwischen Rotor und Fanglager gewährleistet ist. Wir „stoßen“ den Rotor ins Fanglager. Man stellt nun fest, dass es in einem weiten Parameterbereich, bei genügend Reibung, zu gegenläufigen periodischen Bewegungen (*backward whirl*) kommt, die auch auftreten, wenn der Rotor völlig ausgewuchtet ist. Dies gilt für polygonförmige und für runde Fanglager. Der Rotor kann sich nicht mehr vom Fanglager lösen und nach einem Einschwingvorgang stellt sich ein stabiler Grenzzykel ein. Diese selbsterregte Bewegung bezieht ihre Energie aus der konstant gehaltenen Rotation des Rotors. Als Vermittlung dient die Reibung beim Kontakt.

Wir untersuchen den Einfluss verschiedener Systemparameter auf die selbsterregte periodische Bewegung des Laval-Rotors. Besondere Aufmerksamkeit verdienen

- die maximale Geschwindigkeit \tilde{v}_W des Wellenmittelpunkts W und
- der maximale Betrag der Kontaktkraft \tilde{F}_{FL}

der selbsterregten Rotorbewegung im eingeschwingenen Zustand. Sind diese Werte hoch,

so stellt dies einen Nachteil für den praktischen Einsatz des Fanglagers dar.

4.2.1 Fanglager in Form regelmäßiger Polygone

In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf starr aufgehängte Fanglager in Form *regelmäßiger* Polygone. Unregelmäßige Polygone folgen im Abschnitt 4.2.8.

Das erste Fanglager mit dem wir den Laval-Rotor ausstatten, hat die Form eines regelmäßigen **dreiseitigen** Polygons (Parameter: Tabelle C.6). Die Kontaktparameter wählen wir entsprechend der PVC-Hülse aus unseren Versuchen (Tabelle C.3).

Der Anfangszustand ($x_0 = 0, y_0 = 0, \dot{x}_0 = -0,15 \text{ m/sec}, \dot{y}_0 = -0,20 \text{ m/sec}$) führt zu einem ersten Kontakt zwischen Rotor und Fanglager. Nach wenigen Stößen, etwa eine Sekunde später, stellt sich bei der gewählten Drehzahl von $\Omega/2\pi = 6,00 \text{ Hz}$ eine periodische Lösung ein, bei der der Wellenmittelpunkt eine geschlossene Bahn (Orbit) in der Fanglagerebene beschreibt. Diese Bahn wird entgegen der Rotordrehung durchlaufen und ähnelt in ihrer Form einem gleichseitigen Dreieck (siehe Bilder 4.3 und 3.1).

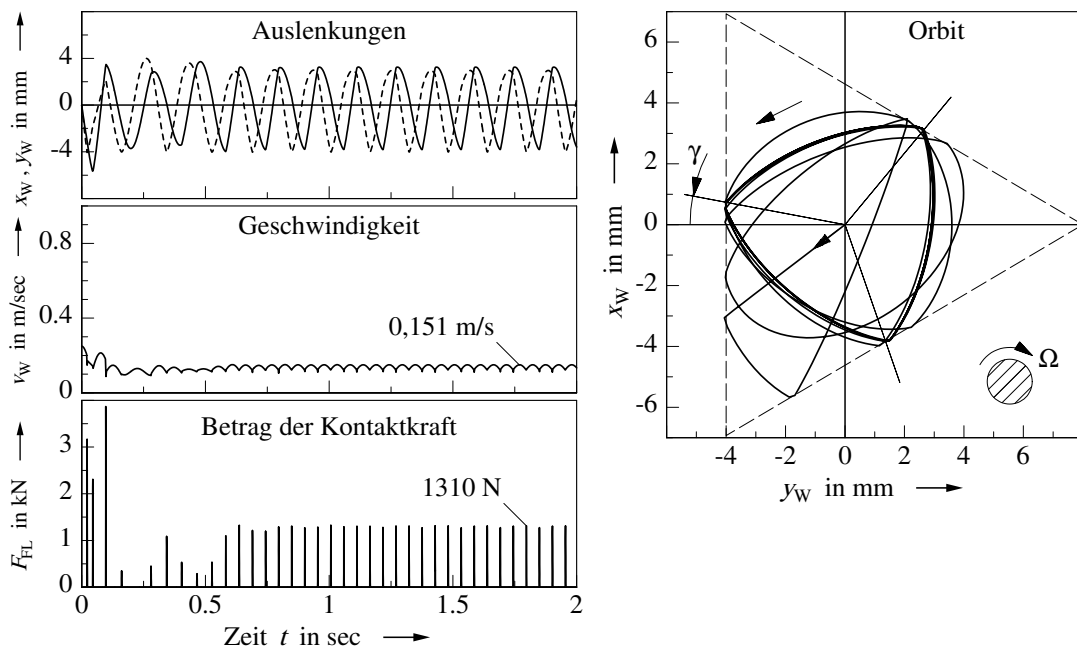


Bild 4.3: Simulation: Einschwingvorgang und schließlich periodische Rotorbewegung in **dreiseitigem** Fanglager. Zeitverläufe: Rotorauslenkungen $x_W(t)$ und (gestrichelt) $y_W(t)$, Geschwindigkeit $v_W(t)$ des Wellenmittelpunkts sowie Betrag der Kontaktkraft $F_{FL}(t)$. Orbit: $x_W(y_W)$. Reibwinkel γ . (Laval-Rotor ohne Unwucht, $\Omega/2\pi = 6,00 \text{ Hz}$, $\omega_0/2\pi = 4,70 \text{ Hz}$; starr gel. FL; PVC-Hülse).

Die Bahn weist eine *zyklische* Drehsymmetrie auf, bei der die Figur nach einer drittel Umdrehung um den Ursprung identisch abgebildet wird. Die Bahn besitzt keine Spiegel-

symmetrie, auch wenn es im Bild 4.3 so erscheint. Pro Umlauf schlägt die Welle einmal auf jeder Fangfläche auf. Die Bahn kreuzt sich während einer Periode nicht selbst, wir bezeichnen sie als *einschleifig*.

Im eingeschwungenen Zustand erreicht die Geschwindigkeit v_W des Wellenmittelpunkts W ihre größten Werte von $\tilde{v}_W = 0,151$ m/sec regelmäßig zwischen zwei Stößen. Im Zeitverlauf der Kontaktkraft $F_{FL}(t)$ erkennt man die einzelnen Stöße an den scharfen Spitzen. Im eingeschwungenen Zustand entstehen Kontaktkräfte von $\tilde{F}_{FL} = 1310$ N.

Die Anzahl der Fangflächen wird gesteigert. Wir simulieren die Rotorbewegung in einem regelmäßigen, **vierseitigen** und einem **sechseitigen** Fanglager bei sonst gleichen Parametern und Anfangsbedingungen.

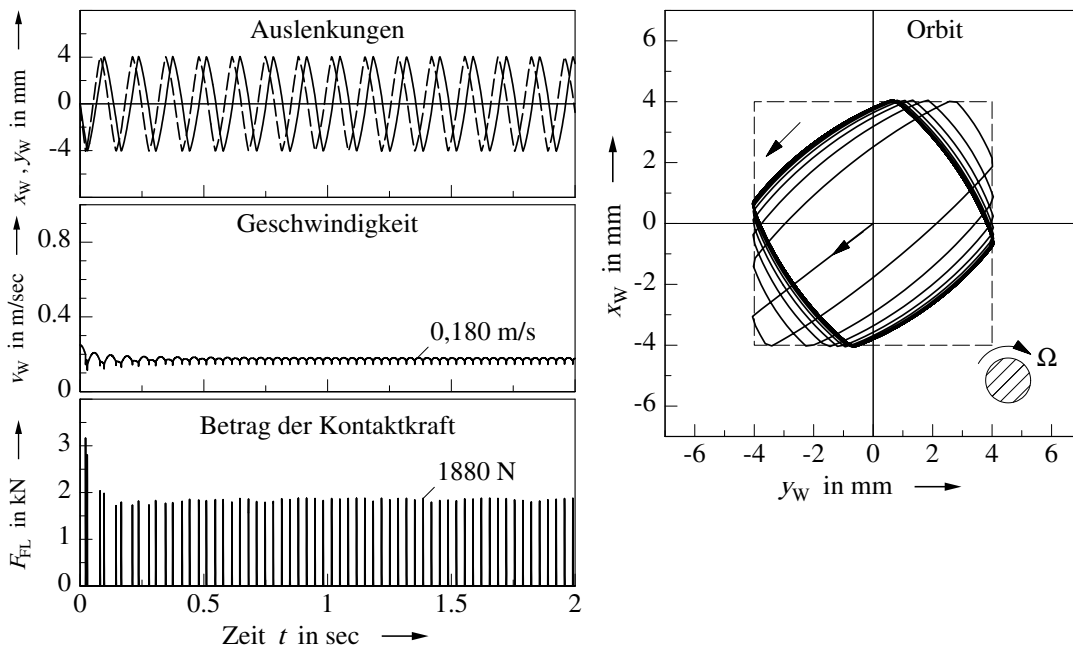


Bild 4.4: Simulation: Einschwingvorgang und schließlich periodische Rotorbewegung in **vierseitigem** Fanglager. Zeitverläufe: Rotorauslenkungen $x_W(t)$ und (gestrichelt) $y_W(t)$, Geschwindigkeit $v_W(t)$ des Wellenmittelpunkts sowie Betrag der Kontaktkraft $F_{FL}(t)$. Orbit: $x_W(y_W)$. (Laval–Rotor ohne Unwucht, $\Omega/2\pi = 6,00$ Hz, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; starr gel. FL; PVC–Hülse).

Wie beim dreiseitigen Fanglager kommt es auch hier nach kurzen Einschwingphasen zu periodischen Rotorbewegungen mit entsprechenden Eigenschaften. Die Umlaufbahnen sind gegenläufig und einschleifig und besitzen eine zyklische Drehsymmetrie vierter bzw. sechster Ordnung. Auf jeder Fangfläche gibt es genau einen Kontaktpunkt (siehe Bilder 4.4 und 4.5).

Die maximalen Geschwindigkeiten \tilde{v}_W und Kontaktkräfte \tilde{F}_{FL} der periodischen Bewegung steigen mit zunehmender Anzahl von Fangflächen. Die Werte sind zusammen mit denen weiterer Fanglager im Bild 4.8 dargestellt.

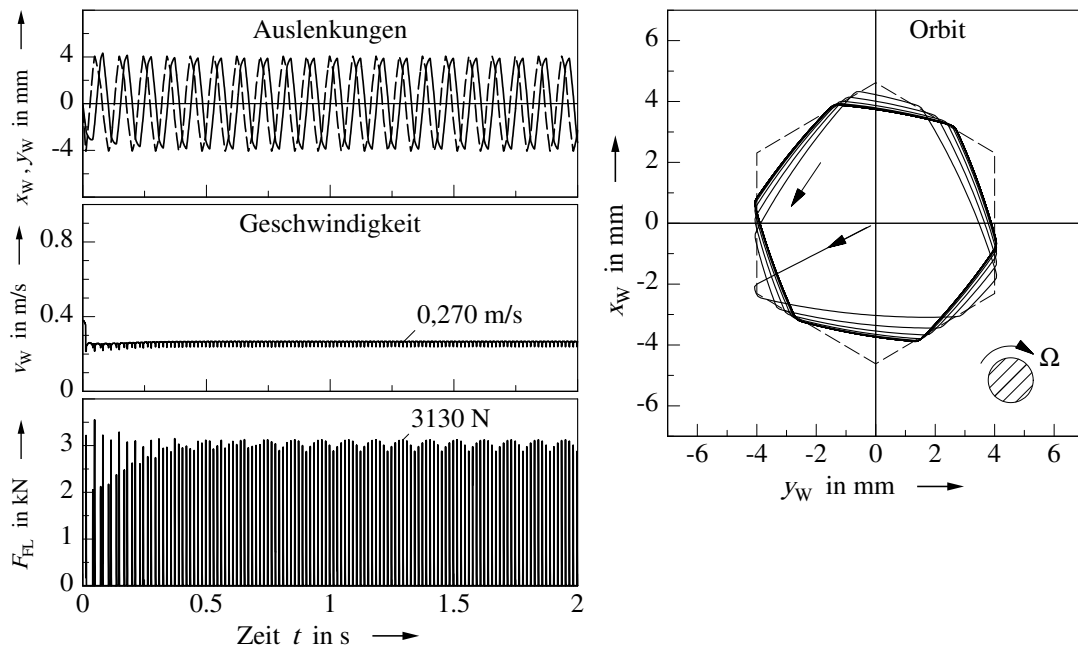


Bild 4.5: Simulation: Einschwingvorgang und schließlich periodische Rotorbewegung in **sechseckigem** Fanglager. Zeitverläufe: Rotorauslenkungen $x_W(t)$ und (gestrichelt) $y_W(t)$, Geschwindigkeit $v_W(t)$ des Wellenmittelpunkts sowie Betrag der Kontaktkraft $F_{FL}(t)$. Orbit: $x_W(y_W)$. (Laval-Rotor ohne Unwucht, $\Omega/2\pi = 6,00$ Hz, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; starr gel. FL; PVC-Hülse).

Die Stöße sind reibungsbehaftet, daher sind Ein- und Ausfallswinkel ungleich. Die Umfangsgeschwindigkeit der Welle ΩR , die in den gezeigten Simulationen stets größer ist als die Geschwindigkeit v_W , bestimmt die Orientierung der Reibkräfte. Bei den gezeigten Umlaufbahnen mit zyklischer Symmetrie liegen die Kontaktpunkte nicht in der Mitte der Fangflächen, sondern sind alle um den gleichen Betrag in Richtung der Rotordrehung versetzt angeordnet. Unter vereinfachenden Annahmen lässt sich zeigen (siehe Anhang B), dass die Winkelhalbierende zwischen Ein- und Ausfallbahn näherungsweise unter dem Reibwinkel γ zur Wandnormalen steht,

$$\tan \gamma = \mu . \quad (4.1)$$

Die Bahn erscheint so, als ob sie in einem, um den Reibwinkel γ gedrehten Fanglager bei reibungsfreien Stößen entstanden wäre (vgl. Bild 4.3). Die Winkelhalbierenden laufen nicht notwendigerweise durch den Fanglagermittelpunkt F .

4.2.2 Runde Fanglager

Zum Vergleich folgt die Simulation der Rotorbewegung in einem runden Fanglager (Parameter: Tabelle C.8) mit starrer Aufhängung. Wir nutzen hier das Kontaktmodell für runde

Fanglager (Abschnitt 2.2).

Bei sonst gleichen Parametern und Anfangsbedingungen wie oben kommt es auch hier nach einer Einschwingphase zu einer vergleichbaren periodischen Bewegung, dem *backward whirl* (vgl. Abschnitt 1.3). Die Welle läuft bei permanentem Kontakt im Fanglager um. Die Umlaufbahn ist gegenläufig und kreisförmig (siehe Bild 4.6). Die konstante Geschwindigkeit des Wellenmittelpunkts liegt mit $\tilde{v}_W = 0,940$ m/sec nur ganz knapp unter dem Wert für reines Abrollen ($\Omega r = 0,943$ m/sec), aber deutlich über den Werten für polygonförmige Fanglager mit wenigen Fangflächen. Es kommt zu einer konstanten, aber schnell umlaufenden Kontaktkraft, deren Wert mit $\tilde{F}_{FL} = 2190$ N über denen bei drei- und vierseitigem Fanglager, aber deutlich unter denen des sechseckigen Fanglagers liegt (vgl. Diagramm 4.8).

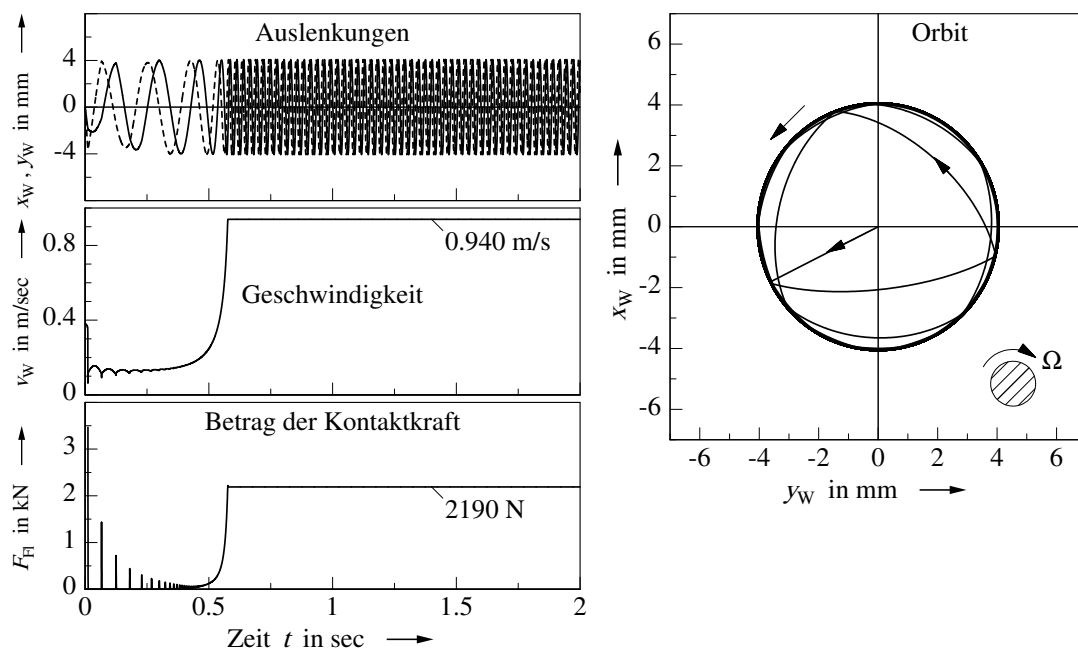


Bild 4.6: Simulation: Einschwingvorgang und schließlich periodische Rotorbewegung (*backward whirl*) in **rundem** Fanglager. Zeitverläufe: Rotorauslenkungen $x_W(t)$ und (gestrichelt) $y_W(t)$, Geschwindigkeit $v_W(t)$ des Wellenmittelpunkts sowie Betrag der Kontaktkraft $F_{FL}(t)$. Orbit: $x_W(y_W)$. (Laval-Rotor ohne Unwucht, $\Omega/2\pi = 6,00$ Hz, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; starr gel. FL; PVC-Hülse).

Mit einigen Einschränkungen kann ein rundes Fanglager bei der Simulation durch ein regelmäßiges Polygon mit vielen Fangflächen angenähert werden. Bild 4.7 zeigt die Rotorbewegung in einem regelmäßigen, **72-seitigen** Fanglager. Der Simulation liegen die gleichen Parameter wie bei der Rechnung zu Bild 4.6 zugrunde.

Der Vergleich der Bilder 4.6 und 4.7 liefert eine gute Übereinstimmung. Geschwindigkeit und Kontaktkraft im eingeschwungenen Zustand sind nahezu identisch. Bei den ersten Stößen in der Einschwingphase fallen die Kontaktkräfte beim 72-seitigen Fanglager teilweise

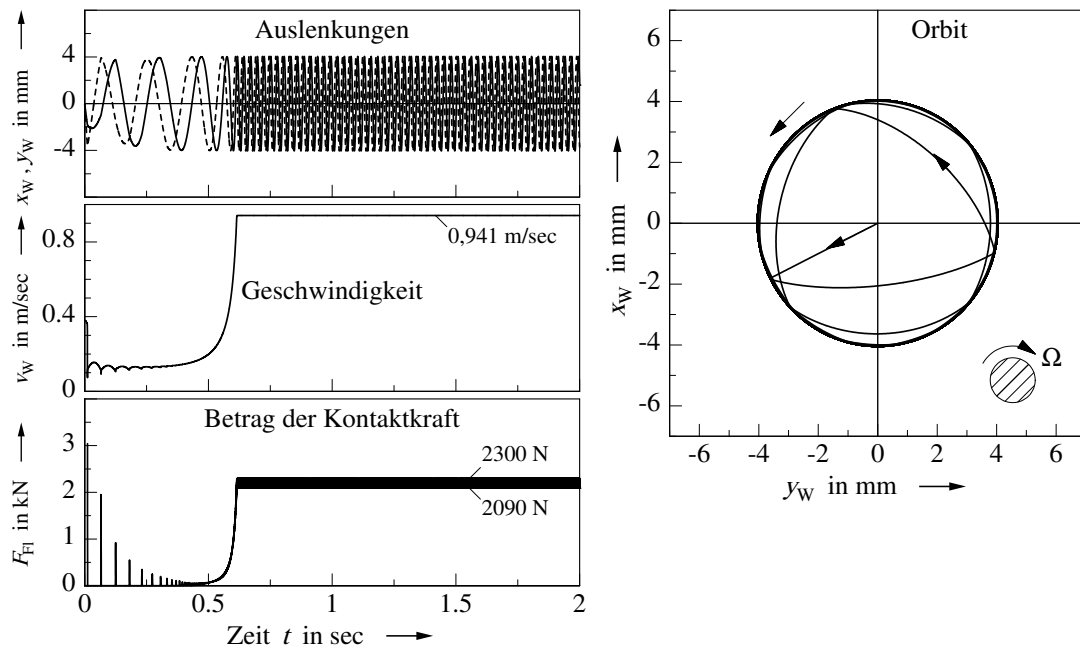


Bild 4.7: Simulation: Rotorbewegung in regelmäßigem, **72-seitigem** Fanglager. Es wird die Simulation mit rundem Fanglager (Bild 4.6) angenähert. (Sonstige Parameter wie in Bild 4.6).

zu groß aus. Die Welle trifft dann gleichzeitig auf zwei Fangflächen, die hier nahezu parallel liegen. Die Annahme unabhängiger Kontaktzonen wird verletzt (vgl. Seite 27).

4.2.3 Einfluss der Anzahl der Fangflächen

Das Diagramm 4.8 zeigt den Einfluss der Anzahl m der Fangflächen eines regelmäßigen, polygonförmigen Fanglagers auf die Geschwindigkeit und Kontaktkräfte im eingeschwungenen Zustand. Die Kontaktparameter entsprechen wie oben der PVC-Hülse (Tabelle C.3). Die Drehzahl liegt bei $\Omega/2\pi = 6,00$ Hz ($f = 6$ Hz). Die Werte bei $m = 3, 4, 6, 72$ und bei rundem Fanglager können aus den Bildern 4.6 bis 4.7 abgelesen werden.

Mit zunehmender Anzahl m der Fangflächen wächst die Geschwindigkeit der selbsterregten gegenläufigen Rotorbewegung. Gleichzeitig nimmt der Bereich (dunklere Blöcke an den Spitzen der Balken), in dem sich die Werte aufhalten, ab. Die Stöße unter zunehmend flacheren Winkeln ändern zwar die Richtung der Bahn, den Betrag der Geschwindigkeit jedoch immer weniger. Bei zwölf-seitigem Fanglager erreicht die Geschwindigkeit mit $\tilde{v}_W = 0,915$ m/sec nahezu den Wert, der sich rein kinematisch durch Abrollen ohne Verformungen ergeben würde ($\Omega r = 0,943$ m/sec). Diese maximale Geschwindigkeit wird in starren Fanglagern nie ganz erreicht oder überschritten. Unser Kontaktmodell berücksichtigt Schlupf und Verluste auch bei stationärem Kontakt.

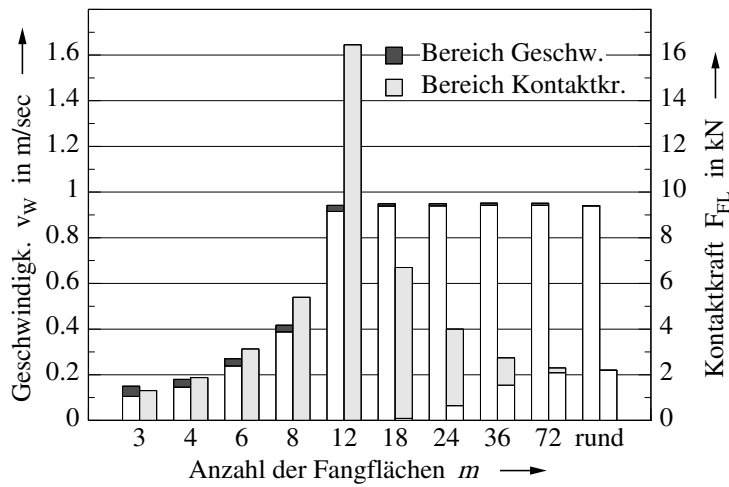


Bild 4.8: Einfluss der Anzahl m der Fangflächen bei regelmäßigen, polygonförmigen Fanglagern auf die selbsterregte gegenläufige Rotorbewegung. Die oberen Teile der Balken kennzeichnen die Bereiche in denen Geschwindigkeit $v_W(t)$ und Kontaktkraft $F_{FL}(t)$ im eingeschwungenen Zustand schwanken. (Laval-Rotor ohne Unwucht, $\Omega/2\pi = 6,00$ Hz, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; starr gel. FL; PVC-Hülse).

Bis zu $m = 12$ wächst auch die Kontaktkraft stetig an und erreicht einen Wert von $\tilde{F}_{FL} = 16\,450$ N. Im 18-seitigen Fanglager entwickelt sich ein permanenter Kontakt (*full annular rub*). Die Kontaktkraft ist zu jedem Zeitpunkt größer als Null, was im zwölfseitigen Fanglager noch nicht der Fall ist. Mit noch mehr Fangflächen nähern sich die Werte immer stärker denen des runden Fanglagers an.

4.2.4 Einfluss der Drehzahl

Bei zu geringer Drehzahl geht der Antrieb der selbsterregten Bewegung — dies sind die Reibkräfte — verloren. Nach einigen Stößen löst sich die Welle wieder vom Fanglager.

Bei einer nicht selten vorhandenen *fallenden* Reibkraft-Kennlinie nimmt die Reibkraft mit wachsender Drehzahl ab, wenn wir eine konstante Normalkraft annehmen und die Relativgeschwindigkeit im Kontakt in erster Linie aus der Rotordrehung entsteht. Dann kann es passieren, dass sich ab einer bestimmten Drehzahl aus einem gegebenen Anfangszustand keine selbsterregte, periodische Bewegung entwickelt. Nach anfänglichem Kontakt löst sich der Rotor wieder vom Fanglager und schwingt gedämpft (siehe Bild 4.9).

Bei unserer Simulation mit dem dreiseitigen Fanglager (Parameter wie oben) liegt die mögliche Drehzahl, bei der sich selbsterregte periodische Bewegungen anstoßen lassen, in einem weiten Bereich von $1,25 \text{ Hz} \leq f \leq 8,25 \text{ Hz}$ (bzw. $7,9 \text{ rad/sec} \leq \Omega \leq 52 \text{ rad/sec}$) um die Eigenfrequenz des Laval-Rotors ($f_0 = \omega_0/2\pi = 4,70 \text{ Hz}$). Bei den Messungen fiel der Bereich mit $2,5 \text{ Hz} \leq f \leq 7 \text{ Hz}$ etwas kleiner aus. Eine Berücksichtigung von Massenexzentrizität und geometrischer Exzentrizität führt auch in den Simulationen zu einer Verminderung dieses Drehzahlbereichs.

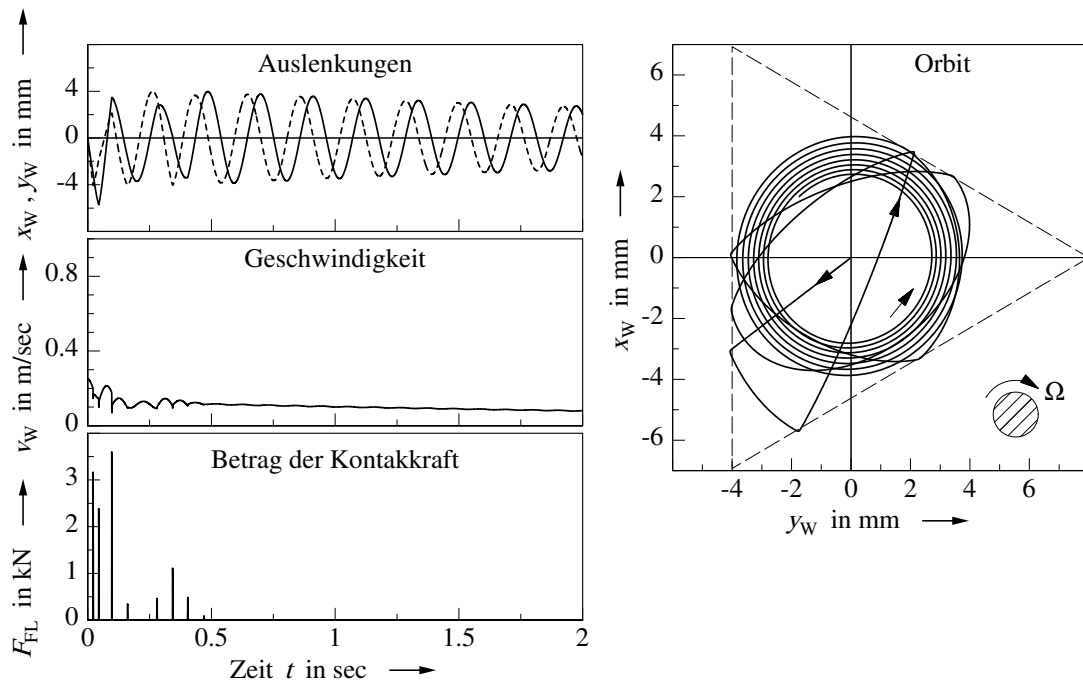


Bild 4.9: Simulation: Ab der hier vorliegenden Drehzahl von $\Omega/2\pi = 8,50$ Hz führt die gewählte Anfangsbedingung auf eine gedämpfte Rotorschwingung und nicht auf eine selbsterregte Bewegung. Diese Simulation entspricht Punkt (a) in Bild 4.10. Zeitverläufe: Rotorauslenkungen $x_W(t)$ und (gestrichelt) $y_W(t)$, Geschwindigkeit $v_W(t)$ des Wellenmittelpunkts sowie Betrag der Kontaktkraft $F_{FL}(t)$. Orbit: $x_W(y_W)$. (Laval-Rotor ohne Unwucht, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; starr gel., dreiseitiges FL; PVC-Hülse).

Bild 4.10 zeigt die maximale Geschwindigkeit \tilde{v}_W und Kontaktkraft \tilde{F}_{FL} der periodischen Rotorbewegung für verschiedene Drehzahlen. Im genannten Bereich sind diese Größen verschieden von Null und verändern sich nur geringfügig mit der Drehzahl. Dieses Verhalten ist typisch für selbsterregte Schwingungen.

Im runden Fanglager dagegen besitzt die Drehzahl einen deutlicheren Einfluss (siehe Bild 4.11). Die Geschwindigkeit \tilde{v}_W wächst (etwa linear), die Kontaktkraft \tilde{F}_{FL} (etwa quadratisch) mit der gewählten Rotordrehzahl. Die einfachen Beziehungen für reines Abrollen, Gleichungen 2.25) und (2.27, gelten in sehr guter Näherung. Der Gleichung $\tilde{v}_W = \Omega r$ für reines kinematisches Abrollen wird nahezu erreicht. Im Gegensatz zum dreiseitigen Fanglager beobachten wir im runden Fanglager auch bei sehr hohen Drehzahlen eine selbsterregte Bewegung. Der Abfall der Reibzahl wird durch den Anstieg der Kontaktkraft mehr als kompensiert.

Schon ab einer Drehzahl von $f = 1,0$ Hz kann eine selbsterregte Bewegung mit Fanglagerkontakt angestoßen werden. Bei unseren Messungen lag die untere Drehzahlgrenze für die Existenz einer selbsterregten gegenläufigen Bewegung in sehr guter Übereinstimmung bei

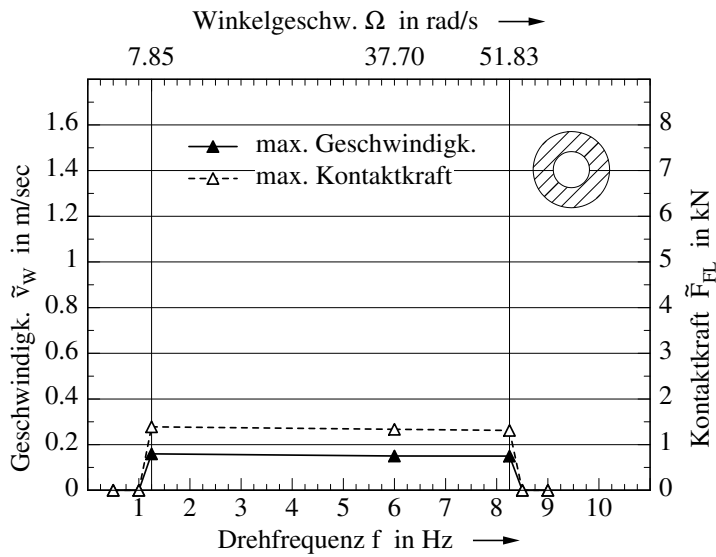


Bild 4.10: Einfluss der Drehzahl Ω bei dreiseitigem Fanglager. Maximale Geschwindigkeit \tilde{v}_W und Kontaktkraft \tilde{F}_{FL} der periodischen Rotorbewegung. Nur in einem bestimmten Drehzahlbereich führt der hier gewählte Anfangszustand auf (nicht-triviale) periodische Lösungen. Punkt (a) entspricht Bild 4.9. (Laval-Rotor ohne Unwucht, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; starr gel. FL; PVC-Hülse).

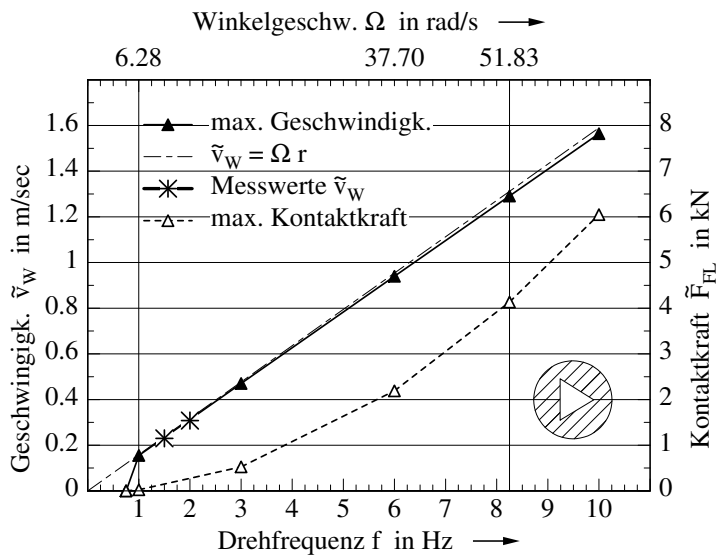


Bild 4.11: Einfluss der Drehzahl Ω bei rundem Fanglager. Maximale Geschwindigkeit \tilde{v}_W und Kontaktkraft \tilde{F}_{FL} der periodischen Rotorbewegung wachsen mit der Drehzahl über alle Grenzen. (Laval-Rotor ohne Unwucht, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; starr gel. FL; PVC-Hülse).

$f = 0,85$ Hz.

Im Bild 4.11 sind einzelne Messwerte der Geschwindigkeit \tilde{v}_W eingetragen. Die gute Übereinstimmung bestätigt die Modellierung und Parameter für Simulation.

4.2.5 Einfluss von Reibung und Kontaktdämpfung

Mit einer periodischen Bewegung stellt sich ein so genannter Grenzykel ein, bei dem die Energiebilanz über eine Periode ausgeglichen ist. Dämpfungen — hier insbesondere durch den Kontakt — entziehen der Bewegung Energie. Die Reibung ist dagegen der Mechanismus in unserem System, der Energie aus der Drehung des Rotors in die Bewegung fließen lässt.

Entsprechend fällt der Einfluss der zugehörigen Parameter aus. Mit einer Zunahme der Reibzahl (wir wählen hier eine von der Geschwindigkeit unabhängige Reibzahl $\mu_0 = \mu_1 = \mu$) wachsen Geschwindigkeit und Kontaktkraft etwa linear. Die Drehzahl liegt bei diesen Simulationen bei $\Omega/2\pi = 6,00$ Hz. Unterhalb einer bestimmten Reibzahl (hier $\mu < 0,09$) können keine selbsterregten Bewegungen bestehen (siehe Bild 4.12).

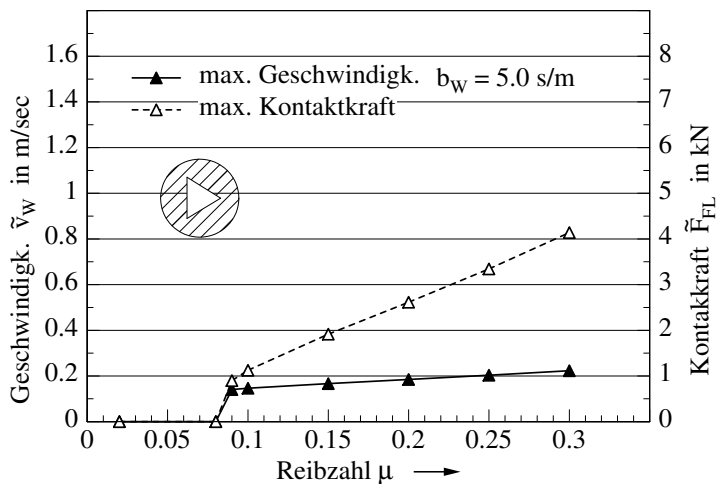


Bild 4.12: Einfluss der Reibzahl μ bei dreiseitigem Fanglager. Maximale Geschwindigkeit \tilde{v}_W und Kontaktkraft \tilde{F}_{FL} der periodischen Rotorbewegung. (Laval-Rotor ohne Unwucht, $\Omega/2\pi = 6,00$ Hz, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; starr gel. FL; Kontaktdämpfung $b_W = 5.0$ sec/m).

Für den Dämpfungsbeiwert b_W des Kontakts (vgl. Gl. (2.18)) gilt, dass dessen Abnahme zu einem (progressiven) Anstieg von Geschwindigkeit und Kontaktkraft führen. Oberhalb eines bestimmten Dämpfungswerts (hier $b_W > 22$ m/sec) können keine selbsterregten Bewegungen bestehen (siehe Bild 4.13).

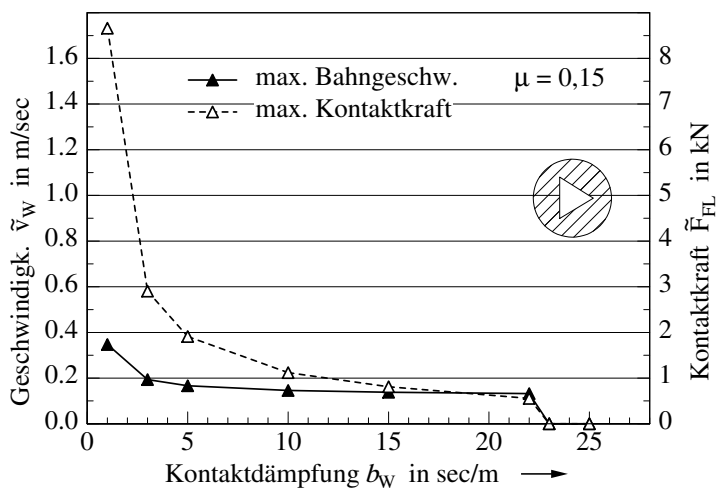


Bild 4.13: Einfluss der Kontaktdämpfung b_W bei dreiseitigem Fanglager. Maximale Geschwindigkeit \tilde{v}_W und Kontaktkraft \tilde{F}_{FL} der periodischen Rotorbewegung. (Laval-Rotor ohne Unwucht, $\Omega/2\pi = 6,00$ Hz, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; starr gel. FL; Reibzahl $\mu = 0,15$).

Wir betrachten nun die Grenze für die Existenz selbsterregter Rotorbewegungen etwas genauer. Diese Grenze teilt das Gebiet, das von den Kontaktparametern Reibzahl μ und Kontaktdämpfung b_W aufgespannt wird, in zwei Gebiete. An der Grenze 1 in Bild 4.14 kann eine oberhalb bereits etablierte periodische Lösung gerade noch existieren. Bei geringerer

Reibung oder größerer Dämpfung führt jeder Anfangszustand schließlich zu kontaktfreier, abklingender Schwingung des Rotors.

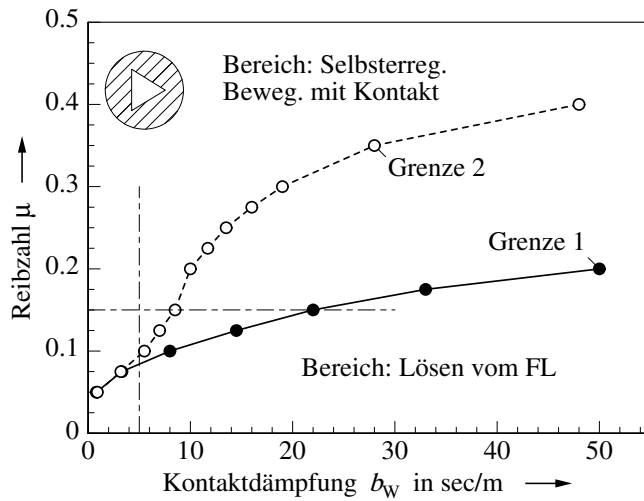


Bild 4.14: Der Parameterbereich, in dem bereits etablierte selbsterregte Bewegungen existieren können (oberhalb Grenze 1), ist größer als der Bereich, in dem sie angefacht werden können (oberhalb Grenze 2). Die Pfade (a) und (b) entsprechen den Parametern der Bilder 4.12 und 4.13. (Laval-Rotor ohne Unwucht, $\Omega/2\pi = 6,00$ Hz, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; dreiseitiges starr gel. FL; PVC-Hülse).

Untersucht man dagegen, ob ein spezieller Anfangszustand auf eine selbsterregte, periodische Bewegung hinläuft, so ergibt sich eine Grenze, die immer über der Grenze 1 liegen muss. Die Grenze 2 im Bild 4.14 gilt z.B. für den Anfangszustand ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{x}_0 = -0,15$ m/sec, $\dot{y}_0 = -0,20$ m/sec) und weicht teilweise deutlich von der Grenze 1 ab. Im Gebiet zwischen den Grenzkurven sind zwar stabile periodische Bewegungen möglich, dennoch entwickelt sich aus unserem speziellen Anfangszustand nach wenigen anfänglichen Stößen eine gedämpfte Rotorschwingung ohne Fanglagerkontakt.

Zusammenfassend gilt also, dass der Parameterbereich, in dem bereits etablierte selbsterregte Bewegungen existieren können (oberhalb Grenze 1), größer ist als der Bereich, in dem sie angefacht werden können (oberhalb Grenze 2).

Für den praktischen Einsatz von Fanglagern ist der Bereich unterhalb der Grenze 1 zu bevorzugen, da sich der Rotor hier nach einem Kontakt in jedem Fall wieder vom Fanglager löst.

4.2.6 Einfluss der Kontaktsteifigkeit

Wir haben gesehen, dass die selbsterregten, gegenläufigen Rotorbewegungen in polygonförmigen Fanglagern durch regelmäßige Kontakte gekennzeichnet sind. Simulationen zeigen nun, dass eine Variation des Parameters k_K für die Kontaktsteifigkeit (vgl. Gl. (2.19)) kaum einen Einfluss darauf hat, ob eine periodische Bewegung existieren kann oder nicht. Auch die Form und Geschwindigkeit der Bahn ist nahezu unabhängig von der Kontaktsteifigkeit (siehe Bilder 4.15 und 4.16). Die maximale Kontaktkraft allerdings, die bei den Kontakten erreicht wird, wächst mit der Kontaktsteifigkeit. Der Zusammenhang ist in etwa linear

und erscheint in der logarithmischen Darstellung von Bild 4.15 exponentiell. Gleichzeitig nehmen die Eindringtiefen a_i und die Kontaktzeiten mit wachsender Kontaktsteifigkeit ab.

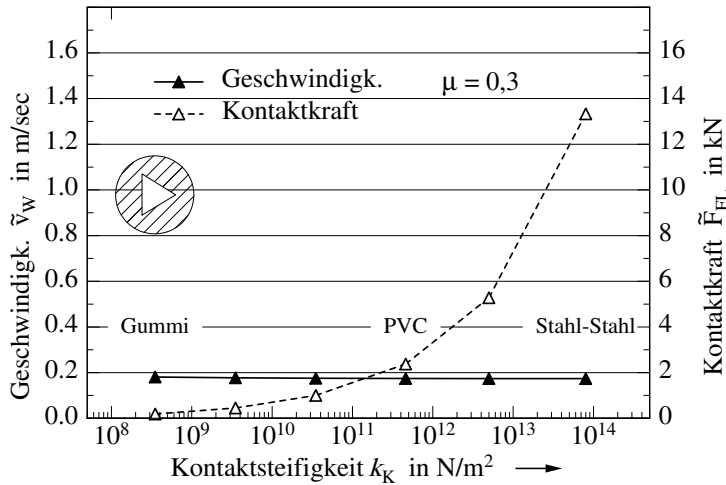


Bild 4.15: Einfluss des Parameters k_K der Kontaktsteifigkeit bei dreiseitigem Fanglager. Maximale Geschwindigkeit \tilde{v}_W und Kontaktkraft \tilde{F}_{FL} der selbsterregten Rotorbewegung. (Laval-Rotor ohne Unwucht, $\Omega/2\pi = 6,00$ Hz, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; starr gel. FL; $\mu = 0,3$; Normalkraftkennlinie Gl. (2.18) mit $p = 2$, $b_K = 11,0$ sec/m).

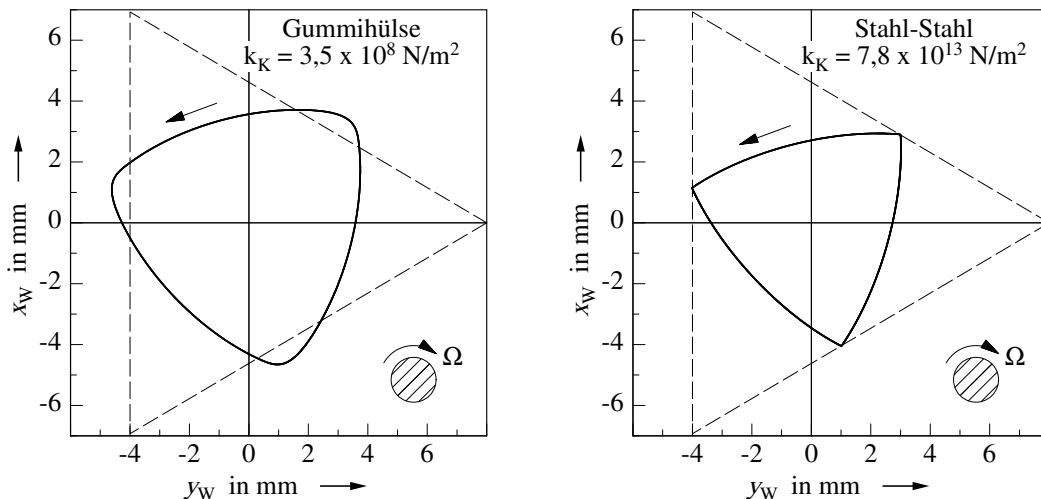


Bild 4.16: Orbit der periodischen Rotorbewegung bei verschiedenen Parametern k_K der Kontaktsteifigkeit. (Laval-Rotor ohne Unwucht, $\Omega/2\pi = 6,00$ Hz, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; starr gel. FL; $\mu = 0,3$, $b_K = 11,0$ sec/m).

Den Bildern 4.15 und 4.16 liegen Simulationen mit den wie folgt geänderten Kontaktparametern für die PVC-Hülse (Tabelle C.3) zu Grunde: Wir wählen eine konstante Reibzahl $\mu = 0,3$ und eine Normalkraftkennlinie nach Gleichung (2.18) mit dem Exponenten $p = 2$ und dem Dämpfungsbeiwert $b_K = 11,0$ sec/m. Der Parameter k_K der Kontaktsteifigkeit variiert von $3,5 \cdot 10^8$ N/m² für den Kontakt der Gummihülse auf einer starren Fangfläche bis zu $7,8 \cdot 10^{13}$ N/m² für den linienförmigen Kontakt zwischen einer Stahlwelle und einer Fangfläche aus Stahl (Quelle der Steifigkeiten: FE-Analyse, Abschnitt 2.3). Im Wesentlichen verändern sich nur die Eindringtiefen a_i und die Kontaktkräfte.

4.2.7 Einfluss von Unwucht

Unwuchten sind am Rotor praktisch immer vorhanden. Sie führen auf nicht autonome Bewegungsgleichungen und haben Einfluss auf die Rotorbewegung. Die Art der Veränderung hängt von der Drehzahl ab.

Wir untersuchen dies am unwuchtbehafteten Laval-Rotors (Massenexzentrizität $e_S = 0,16$ mm), indem wir die Drehzahl im Bereich von $f = 0,5 \dots 65$ Hz in Schritten von $0,5$ Hz verändern und die eingeschwungene Bewegung des Rotors im starr aufgehängten, dreiseitigen Fanglager ermitteln (Kontaktparameter: PVC-Hülse, Tabelle C.3). Speziell tragen wir die Lage x_3 der Punkte, in denen die Welle auf die Fangfläche 3 (sie liegt parallel zur x -Achse) trifft, über der Drehfrequenz f des Rotors auf (siehe Bild 4.17). Die gleiche Lage x_3 besitzen die Stellen, an denen der Wellenmittelpunkt W auf die entsprechende Seite der Freiraumgrenze trifft (vgl. Bilder 4.18 bis 4.20).

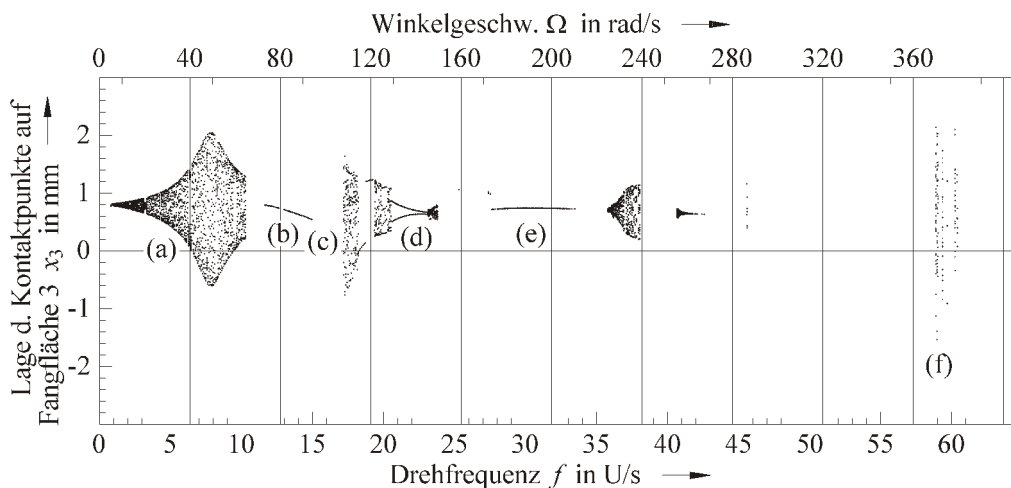


Bild 4.17: Drehzahlabhängiger Einfluss der Unwucht. Die Lage x_3 der Kontaktpunkte auf der Fangfläche 3 gibt Aufschluss über unterschiedliche Arten der Rotorbewegung. Simulationen der Fälle (a) bis (f) in den Bildern 4.18 bis 4.20. (Laval-Rotor mit Unwucht, $e_S = 0,16$ mm, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; starr gel., dreiseitiges FL; PVC-Hülse).

Wir beobachten nun Drehzahlbereiche mit unterschiedlichen Rotorbewegungen:

Bereich (a): Quasi-periodische Bewegung, bei der die Unwucht die selbsterregte Bewegung stört. Die Lösung bleibt innerhalb eines beschränkten Korridors (Bild 4.18-a). Die selbsterregte gegenläufige Bewegung dominiert.

Bereich (b): Periodische Bewegung von halber Drehfrequenz. Die selbsterregte gegenläufige Bewegung der Welle hat sich mit ihrer Drehung synchronisiert. Während einer Periode der Bahnbewegung dreht sich die Welle genau zweimal um sich selbst (Bild

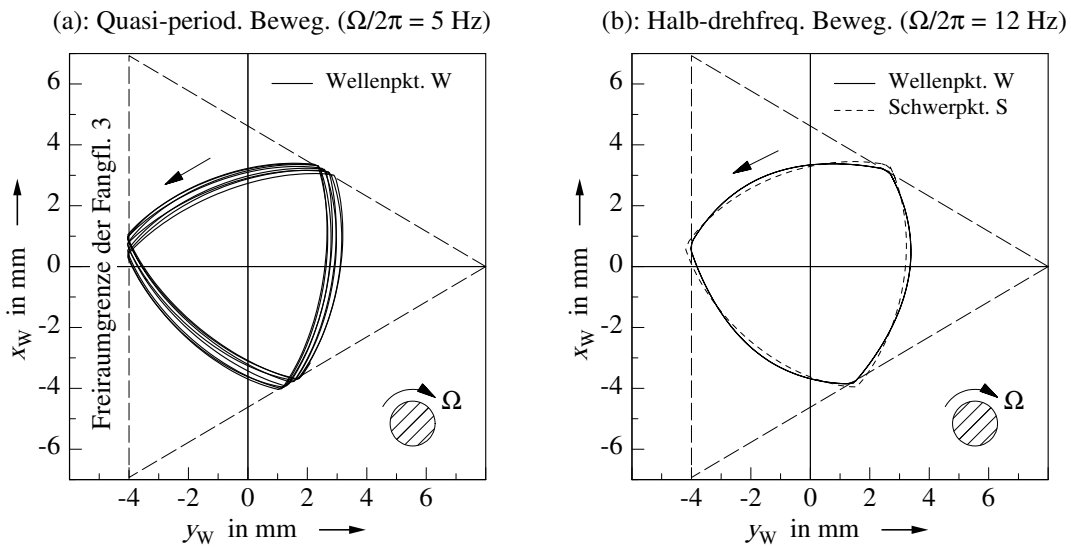


Bild 4.18: Rotorbewegungen bei Unwucht ($e_s = 0,16$ mm). (a): Quasi-periodische Bewegung bei Drehfrequenz $\Omega/2\pi = 5$ Hz. (b): Periodische Bewegung von halber Drehfrequenz, $\Omega/2\pi = 12$ Hz. (Laval-Rotor mit Unwucht, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; starr gel., dreiseitiges FL; PVC-Hülse).

4.18-b). Auf der Welle und auf den Fangflächen befinden sich die Kontaktpunkte an festen Stelle. Die Welle stößt immer mit derselben Stelle ihrer Oberfläche auf immer dieselben Stellen jeder Fangfläche. Die Bahn des Rotorschwerpunkts S zeigt, dass der Schwerpunkt im Augenblick des Kontakts immer zur Fangfläche hin gedreht ist.

Bereich (c): Gedämpfte Schwingung ohne Kontakt. Trotz anfänglicher Kontakte löst sich die Welle wieder vom Fanglager und beschreibt eine abklingende Eigenschwingung, die von der erzwungenen Schwingung überlagert wird (Bild 4.19-c).

Bereich (d): Zweischleifige, periodische Lösung mit einem Achtel der Drehfrequenz. Bei dieser selbsterregten gegenläufigen Lösung sind es zwei diskrete Stellen auf jeder Fangfläche, an denen die Welle auftrifft. Auf der Welle gibt es jetzt ebenfalls zwei feste Kontaktstellen. Zu einer Periode gehören hier sechs Kontakte und acht Rotorumdrehungen (Bild 4.19-d).

Bereich (e): Periodische Bewegung von einem Fünftel der Drehfrequenz. Wie Bereich (b), außer dass hier fünf Rotorumdrehungen zu einer Periode gehören (Bild 4.20-e).

Bereich (f): Unregelmäßige (chaotische) Bewegung. Die selbsterregte Bewegung wird hier durch die Unwucht stark gestört. Die Lösung bleibt nur durch das Fanglager begrenzt. Weiter konnten wir in diesem Drehzahlbereich beobachten, dass sich die Welle auch

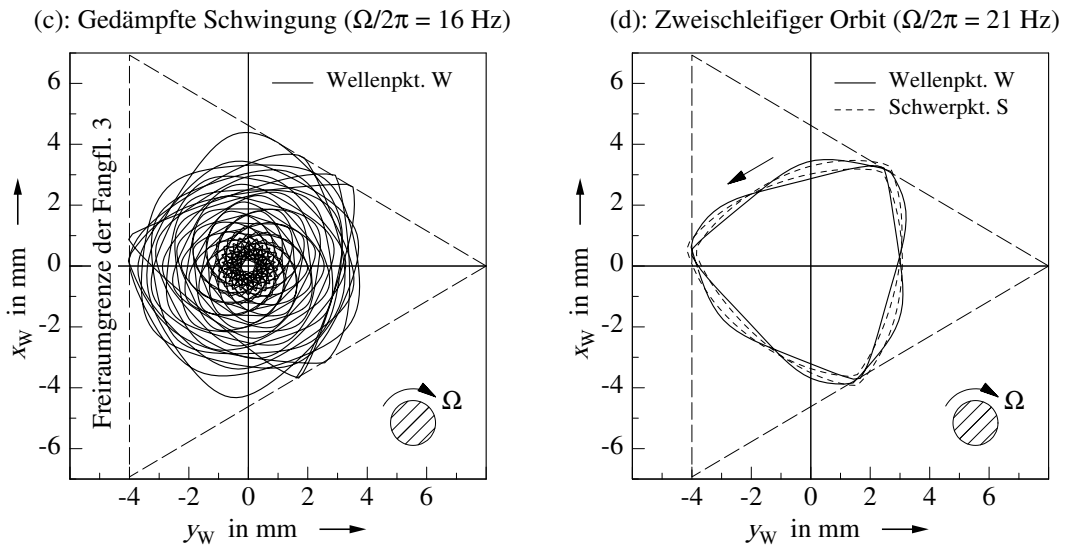


Bild 4.19: Rotorbewegungen bei Unwucht ($e_S = 0,16$ mm). (c): Gedämpfte Schwingung ohne Kontakt bei $\Omega/2\pi = 16$ Hz. (d): Zweischleifige, periodische Bewegung (gegenläufig) von einem Achtel der Drehfrequenz, $\Omega/2\pi = 21$ Hz. (Laval-Rotor mit Unwucht, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; starr gel., dreiseitiges FL; PVC-Hülse).

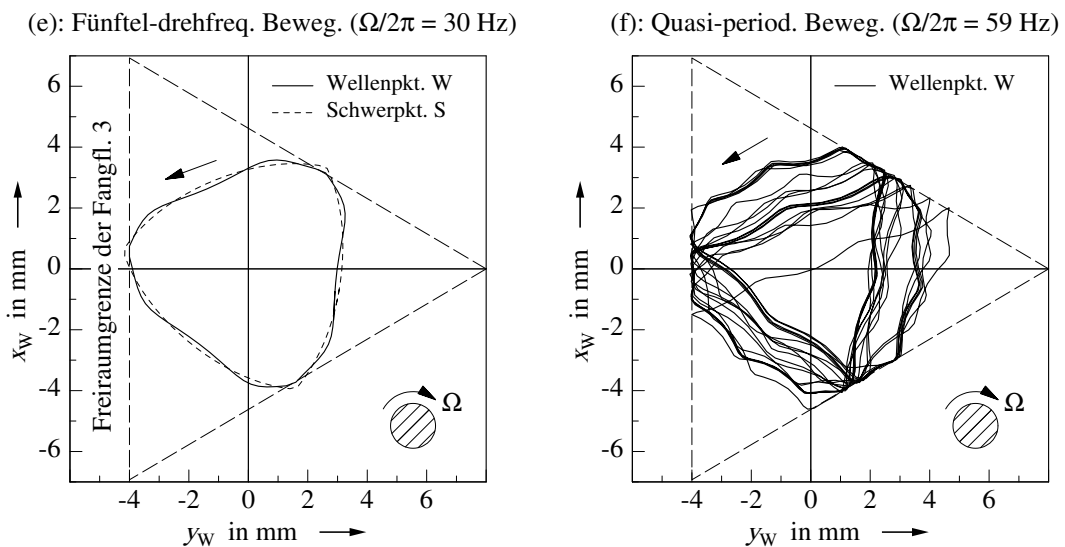


Bild 4.20: Gegenläufige Rotorbewegungen bei Unwucht ($e_S = 0,16$ mm). (e): Periodische Bewegung mit dem Fünftel der Drehfrequenz, $\Omega/2\pi = 30$ Hz. (f): Unregelmäßige (stark gestörte) Bewegung bei $\Omega/2\pi = 59$ Hz. (Laval-Rotor mit Unwucht, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; starr gel., dreiseitiges FL; PVC-Hülse).

nach sehr langen Simulationszeiten spontan und dann dauerhaft vom Fanglager löste (Bild 4.20-f).

Die Frequenz f_W einer streng periodischen, gegenläufigen Rotorbewegung in einem regelmäßigen, m -seitigen Fanglager muss bei einem ungewichtigen Rotor in einem bestimmten Verhältnis zur Drehfrequenz f des Rotors stehen:

$$\frac{f_W}{f} = \frac{1}{(mk - 1)}, \quad k \in \mathbb{N}^+ \quad (4.2)$$

Nur so wird gewährleistet, dass bei jeder Periode dieselben festen Punkte der Welle zum Kontakt kommen. Für die Frequenz f_W der selbsterregten gegenläufigen Bewegung des Rotors im dreiseitigen Fanglager $m = 3$ gilt damit

$$\frac{f_W}{f} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{(3k - 1)} \right\}, \quad (4.3)$$

was sich in den Bereichen (b), (d) und (e) zeigt.

4.2.8 Fanglager in Form unregelmäßiger Polygone

Auch bei Fanglagern in Form unregelmäßiger Polygone entwickeln sich periodische Rotorbewegungen.

So wie das Fanglager selbst, verliert hier die Bahn des Wellenmittelpunkts die Eigenschaft der zyklischen Symmetrie. Die Geschwindigkeiten vor den Stößen und die Kontaktkräfte durch die Stöße variieren nun während einer Periode von Stoß zu Stoß. Diese Tatsache hat zwei Konsequenzen. Einerseits ist der Parameterbereich für die Existenz einer selbsterregten gegenläufigen Lösung gegenüber einem vergleichbaren, regelmäßigen Fanglager verringert. Der Rotor löst sich leichter vom Fanglager. Andererseits liegt aber die Größe dieser Stoßkräfte im Fall einer periodischen Bewegung über der im regelmäßigen Fanglager.

Als Beispiel berechnen wir die Rotorbewegung in einem gleichschenkligen, dreiseitigen Fanglager mit Innenwinkeln von 70° , 40° und 70° (siehe Bild 4.21). Alle übrigen Parameter werden von der Simulation für das gleichseitige Fanglager (Bild 4.3) unverändert übernommen.

Der dargestellte Zeitraum zeigt die Bewegung während einer Periode. Die größte Geschwindigkeit von $\tilde{v}_W = 0,169$ m/sec wird etwa auf halbem Wege zwischen Fangfläche 1 und Fangfläche 3 erreicht. Bei dem anschließenden Stoß auf Fangfläche 3 entsteht die größte Kontaktkraft von $\tilde{F}_{FL} = 1685$ N. Diese Werte liegen über denen bei vergleichbarem gleichseitigen Fanglager (vgl. gestrichelte Linien in Bild 4.21).

Ein sehr ähnliches Bild ergibt sich bei einem gleichseitigen, aber exzentrisch aufgehängten Fanglager oder bei einer anisotropen Lagerung des Rotors.

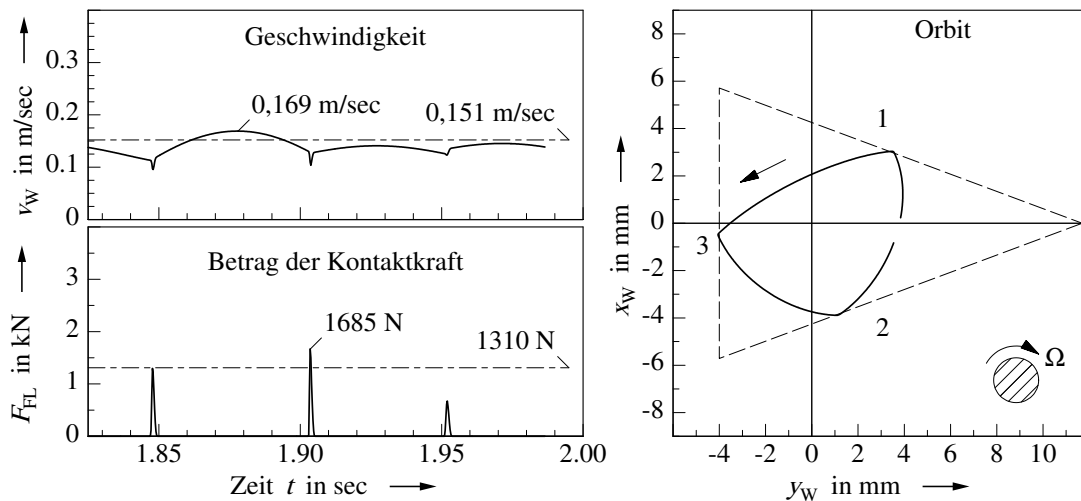


Bild 4.21: Simulation: Periodische Rotorbewegung in einem gleichschenkligen, dreiseitigen Fanglager. Zeitverläufe: Geschwindigkeit $v_W(t)$ des Wellenmittelpunkts sowie Betrag der Kontaktkraft $F_{FL}(t)$. Zum Vergleich \tilde{v}_W und \tilde{F}_{FL} bei gleichseitigem Fanglager (gestrichelt). Orbit: $x_W(y_W)$. (Sonstige Parameter wie in Bild 4.3).

4.2.9 Einfluss des Fanglagerspiels

Wir variieren das Fanglagerspiel, indem wir die Größe des Fanglagers verändern und den Wellendurchmesser beibehalten. Wir wählen ein dreiseitiges Fanglager mit Fangflächen-Abständen $R_i = R$ von 27 mm, 29 mm und 31 mm und erhalten bei einem Wellendurchmesser von $r = 25$ mm Spiele $s_i = s$ von 2 mm, 4 mm und 6 mm.

Die maximale Geschwindigkeit \tilde{v}_W und die maximale Kontaktkraft \tilde{F}_{FL} der selbsterregten gegenläufigen Bewegung nehmen mit wachsendem Fanglagerspiel s zu (siehe Bild 4.22).

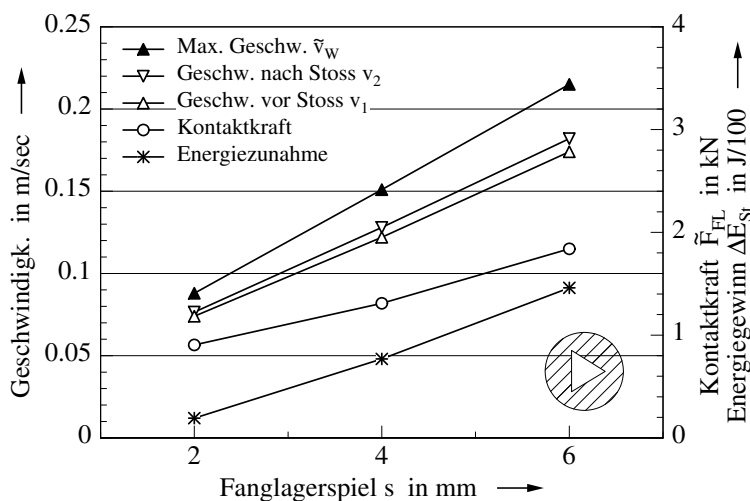


Bild 4.22: Einfluss des Fanglagerspiels $s_i = s$ bei dreiseitigem Fanglager auf Geschwindigkeit v_W , Kontaktkraft \tilde{F}_{FL} und Energiezunahme ΔE_{St} . (Laval-Rotor ohne Unwucht, $\Omega/2\pi = 6,00$ Hz, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; starr gel. FL; PVC-Hülse).

Bei diesem Einfluss spielen die Rückstellkräfte der elastischen Laval-Welle eine wichtige

Rolle. Mit zunehmendem Fanglagerspiel nehmen die radialen Auslenkungen der selbsterregten Rotorbewegung zu und mit ihnen die Rückstellkräfte der verformten Welle. Die Bahn der Welle zwischen zwei Stößen ist dadurch stärker gekrümmt und die Welle trifft unter einem flacheren Winkel auf die Fangflächen auf. Dies verändert die Energiebilanz beim Stoß. Wir ermitteln die Zunahme der Bewegungsenergie des Rotors,

$$\Delta E_{St} = \frac{1}{2} m_W (v_2^2 - v_1^2) , \quad (4.4)$$

bei einem Stoß aus der Geschwindigkeit v_1 unmittelbar vor und v_2 unmittelbar nach dem Kontakt (siehe Bild 4.23). Der Energiegewinn durch einen Stoß nimmt mit dem Fanglagerspiel zu. Es stellt sich eine periodische Lösung mit höheren Geschwindigkeiten ein.

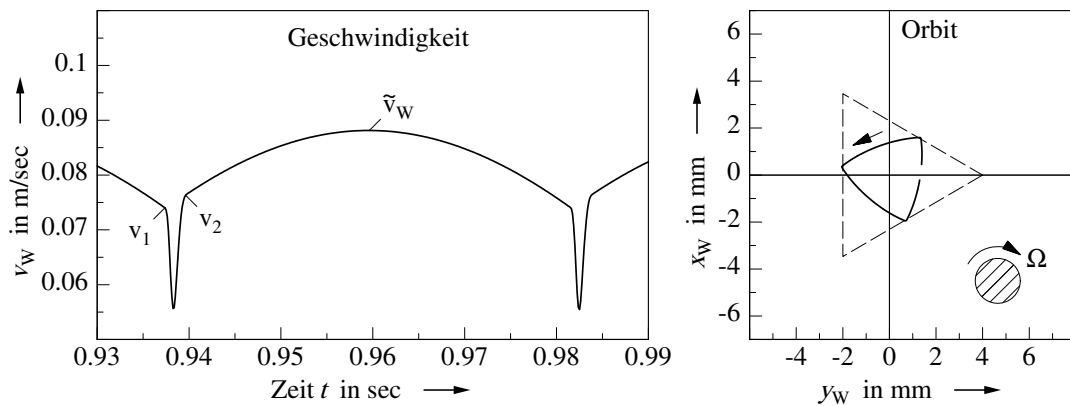


Bild 4.23: Simulation: Periodische Rotorbewegung in einem dreiseitigen Fanglager mit einem Fanglagerspiel von nur $s = 2$ mm. Geschwindigkeit $v_W(t)$. Orbit: $x_W(y_W)$. (Sonstige Parameter wie in Bild 4.3).

Die Variation der Wellensteifigkeit k_W des Laval-Rotors führt zu sehr ähnlichen Veränderungen der Rotorbewegung. Dabei entspricht eine Erhöhung der Steifigkeit einer Vergrößerung des Fanglagerspiels. Bei ungeselltem und ungedämpftem Rotor entfällt der gezeigte Einfluss des Fanglagerspiels.

Bei den selbsterregten gegenläufigen Bewegung in runden Fanglagern (*backward whirl*) ist der Einfluss des Fanglagerspiels umgekehrt. Hier führt eine Verminderung des Spiels s (bei konstantem Wellendurchmesser r) zu einer Erhöhung der Geschwindigkeit und der Kontaktkräfte (vgl. Gl. (2.27)).

4.2.10 Einfluss der Anfangsbedingungen

Im Abschnitt 4.2.5 haben wir gesehen, dass es von der Anfangsbedingung abhängen kann, ob eine selbsterregte gegenläufige Bewegung angestoßen wird oder nicht. Selbst wenn die

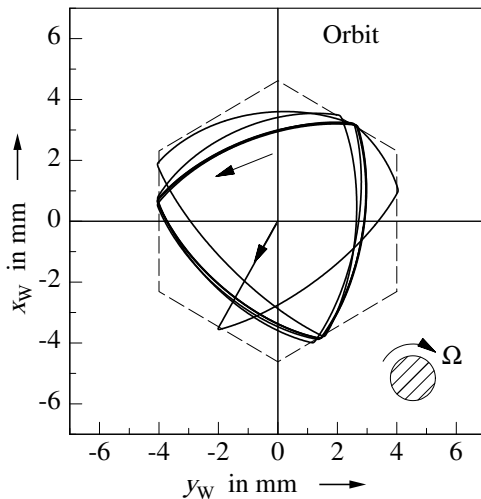


Bild 4.24: Simulation: Selbsterregte gegenläufige Rotorbewegung in einem sechsseitigen Fanglager. Die gewählte Anfangsbedingung führt auf die gleiche Lösung wie in einem entsprechenden dreiseitigen Fanglager (Bild 4.3). Orbit: $x_W(y_W)$. (Parameter wie in Bild 4.5).

Parameter die Existenz einer periodischen Lösung zulassen, so kann sich der Rotor je nach Anfangsbedingung doch nach einigen Stößen wieder vom Fanglager lösen (vgl. Bild 4.14).

In einigen polygonförmigen Fanglagern können bei gleichen Voraussetzungen auch verschiedene selbsterregte gegenläufige Rotorbewegungen existieren. Es hängt dann von der Anfangsbedingung ab, auf welchen der stabilen Grenzykel die Lösung hinläuft.

In einem regelmäßigen sechsseitigen Fanglager kann z.B. eine selbsterregte gegenläufige Bewegung existieren, die der in einem dreiseitigen Fanglager entspricht. Die Welle schlägt dann nur auf jeder zweiten Fangfläche auf (siehe Bild 4.24). Wir haben bei Simulationen und Experimenten sogar Bewegungen beobachtet, bei denen die Welle zwischen zwei gegenüberliegenden parallelen Fangflächen des vierseitigen Fanglagers hin und her schlägt.

4.3 Periodische Bewegungen bei elastisch aufgehängten Fanglagern

Die Fanglager werden nun elastisch aufgehängt. Zu den radialen Auslenkungen des Rotors (x_W, y_W) treten die drei Freiheitsgrade des Fanglagers (x_F, y_F, φ_F) hinzu. Wir untersuchen zunächst die selbsterregten, meist gegenläufigen Bewegungen des Laval-Rotors und die dazugehörigen Bewegungen des Fanglagers bei konstanter Drehzahl.

4.3.1 Polygonförmige Fanglager

Wieder beginnen wir mit Fanglagern in Form regelmäßiger Polygone.

Das bekannte **dreiseitige** Fanglager (Parameter: Tabelle C.6) wird elastisch und ge-

dämpft aufgehängt. Steifigkeiten und Dämpfungskonstanten entsprechen einer Aufhängung mit vier Gummifedern gemäß unserem Experimenten (Tabelle C.5). Die Parameter der Fanglager–Aufhängung werden durch Ausschwingversuche (vgl. Abschnitt 6.3.3) bestimmt. Daraus ergeben sich folgende Eigenfrequenzen des ungedämpften Systems:

$$f_{0F} = \omega_{0F}/2\pi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_F}{m_F}} = 38,5 \text{ Hz} \quad (\text{Translation}) ,$$

$$f_{0F\varphi} = \omega_{0F\varphi}/2\pi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{tF}}{J_F}} = 52,5 \text{ Hz} \quad (\text{Rotation})$$

Für den Kontakt nehmen wir Parameter, die der PVC–Hülse (Tabelle C.3) entsprechen.

Die Dämpfung der Fanglager–Aufhängung führt zu zusätzlichen Verlusten beim Kontakt. Das Anfachen einer selbsterregten gegenläufigen Bewegung wird dadurch erschwert. Die speziellen Anfangsbedingung ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{x}_0 = -0,15 \text{ m/sec}$, $\dot{y}_0 = -0,20 \text{ m/sec}$), mit der der Rotor von der Mitte aus in das Fanglager gestoßen wird, führt zwar zu ersten Kontakten zwischen Rotor und Fanglager, nicht jedoch zu einer selbsterregten Bewegung, wie das beim starr aufgehängten Fanglager möglich war.

Für das System existieren aber selbsterregte periodische Bewegungen in einem Drehzahlbereich von $1,30 \text{ Hz} \leq \Omega/2\pi \leq 11,46 \text{ Hz}$. Mit Hilfe des Schießverfahrens können wir geeignete Anfangsbedingungen ermitteln. Eine anschließende Integration dieser Anfangsbedingungen bestätigt die Stabilität der selbsterregten Lösung.

Im Experiment ist der Drehzahlbereich, in dem selbsterregte gegenläufige Bewegungen des Laval–Rotors im dreiseitigen Fanglager mit elastischer Aufhängung existieren, etwas weiter eingeschränkt: $1,5 \text{ Hz} \leq \Omega/2\pi \leq 9,0 \text{ Hz}$.

Die Bilder 4.25 und 4.26 zeigen die periodische Bewegung von Rotor und dreiseitigem Fanglager bei einer Drehzahl von $\Omega/2\pi = 6,00 \text{ Hz}$. Beide Bilder stellen Ergebnisse der selben Simulation dar. Im Orbit–Diagramm ist zum Größenvergleich die Freiraumgrenze bei unbewegtem Fanglager eingetragen.

Der Orbit des Wellenmittelpunkts ähnelt einem solchen, der im starr aufgehängten Fanglager bei sehr weichem Kontakt entsteht (vgl. Bild 4.16). Der Rotor stößt das Fanglager nach außen. Es entsteht eine größere radiale Auslenkung des Rotors als bei starrer Aufhängung.

Die größte Geschwindigkeit des Wellenmittelpunkts W liegt mit $\tilde{v}_W = 0,174 \text{ m/sec}$ etwas über der bei starr aufgehängtem Fanglager ($0,151 \text{ m/sec}$). Der erste Stoß einer Kontaktphase (Punkt A im Bild) bringt die Geschwindigkeit v_F des Fanglagermittelpunkts F für kurze Zeit auf ähnlich hohe Werte $\tilde{v}_F = 0,145 \text{ m/sec}$.

Der Verlauf der Kontaktkraft $F_{FL}(t)$, also die Kraft zwischen Rotor und Fanglager, zeigt, dass eine Kontaktphase jetzt aus einzelnen Stößen (A und B) sowie einem Prellvorgang (B bis C) besteht. Die einzelnen Stöße führen zu starken Änderungen in der Bahn des

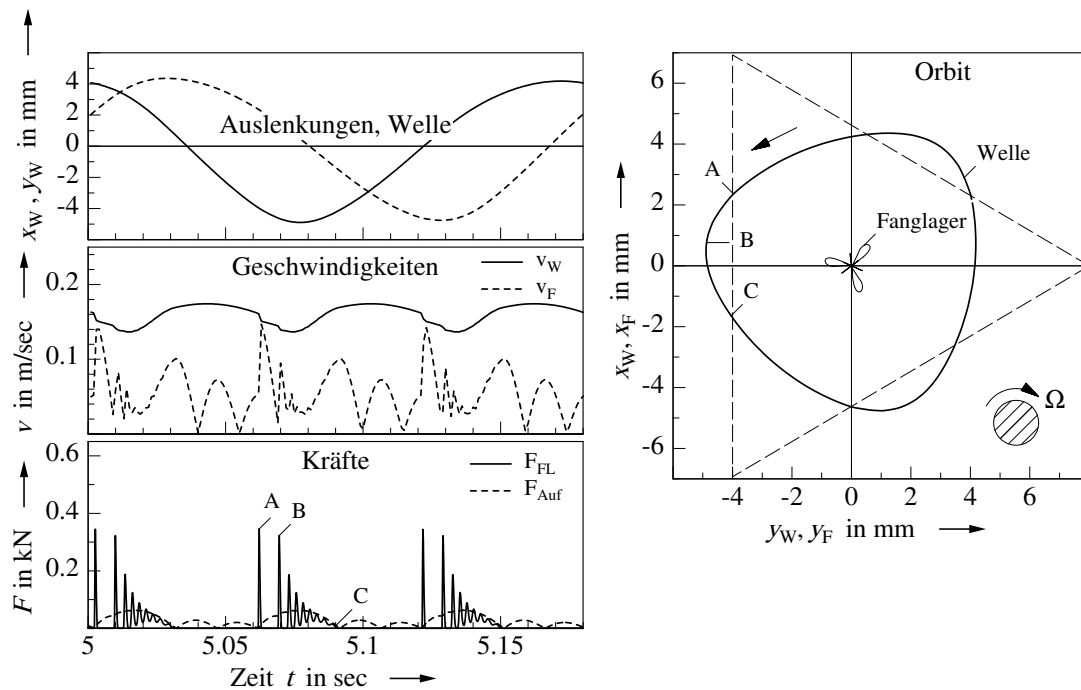


Bild 4.25: Simulation: Selbsterregte gegenläufige Rotorbewegung in dreiseitigem Fanglager mit elastischer Aufhängung. Kontaktbeginn bei (A), zweiter Stoß bei (B), Pellen bis (C). Zeitverläufe: Rotorauslenkungen $x_W(t)$ und (gestrichelt) $y_W(t)$, Geschwindigkeiten $v_W(t)$ des Wellenmittelpunkts und $v_F(t)$ des Fanglagermittelpunkts, Beträge der Kontaktkraft $F_{FL}(t)$ und der Kraft $F_{Auf}(t)$ in der Fanglager–Aufhängung. Orbit: $x_W(y_W)$, $x_F(y_F)$ und Freiraumgrenze in Referenzlage. (Laval-Rotor ohne Unwucht, $\Omega/2\pi = 6,00$ Hz, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; FL: $f_{0F} = 38,5$ Hz; PVC-Hülse).

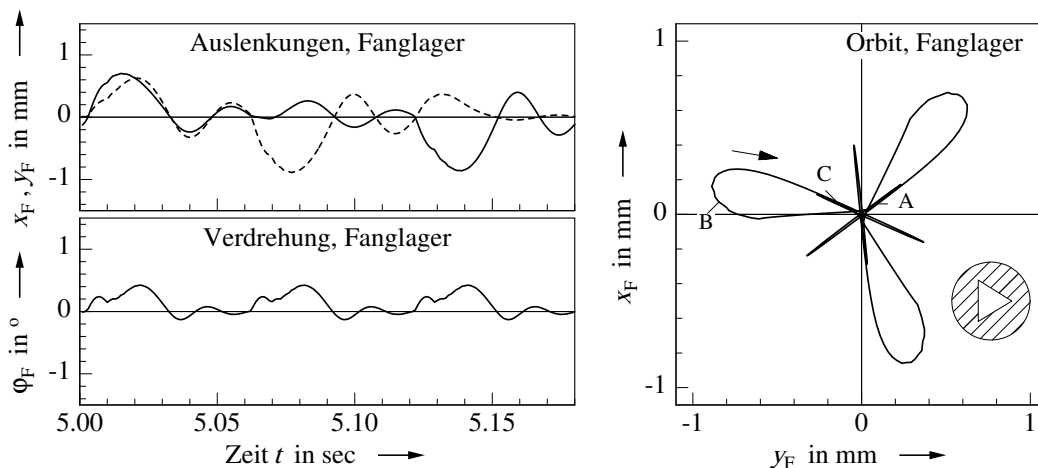


Bild 4.26: Simulation: Periodische Bewegung des dreiseitigen Fanglagers mit elastischer Aufhängung. Kontaktbeginn bei (A), zweiter Stoß bei (B), Pellen bis (C). Zeitverläufe: Auslenkungen $x_F(t)$ und (gestrichelt) $y_F(t)$, Verdrehung $\phi_F(t)$ des Fanglagers. Orbit: $x_W(y_W)$, $x_F(y_F)$. (Parameter wie Bild 4.25).

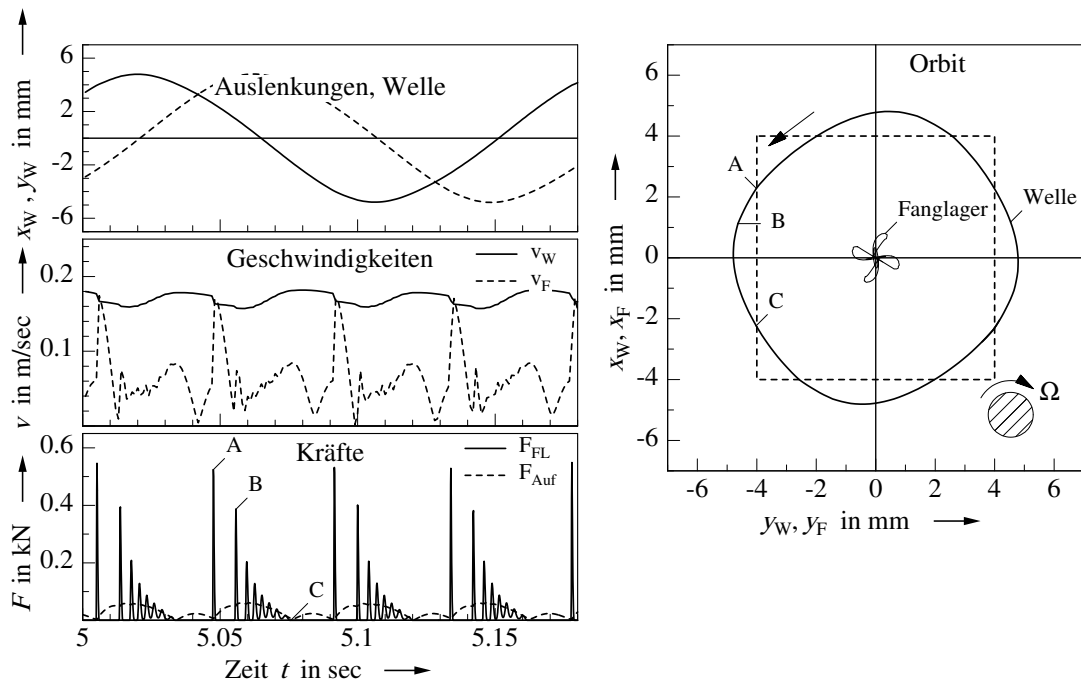


Bild 4.27: Simulation: Selbsterregte gegenläufige Rotorbewegung in vierseitigem Fanglager mit elastischer Aufhängung. Kontaktbeginn bei (A), zweiter Stoß bei (B), Prellen bis (C). Zeitverläufe: Rotorauslenkungen $x_W(t)$ und (gestrichelt) $y_W(t)$, Geschwindigkeiten $v_W(t)$ des Wellenmittelpunkts und $v_F(t)$ des Fanglagermittelpunkts, Beträge der Kontaktkraft $F_{FL}(t)$ und der Kraft $F_{Auf}(t)$ in der Fanglager–Aufhängung. Orbit: $x_W(y_W)$, $x_F(y_F)$ und Freiraumgrenze in Referenzlage. (Laval–Rotor ohne Unwucht, $\Omega/2\pi = 6,00$ Hz, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; FL: $f_{0F} = 38,5$ Hz; PVC–Hülse).

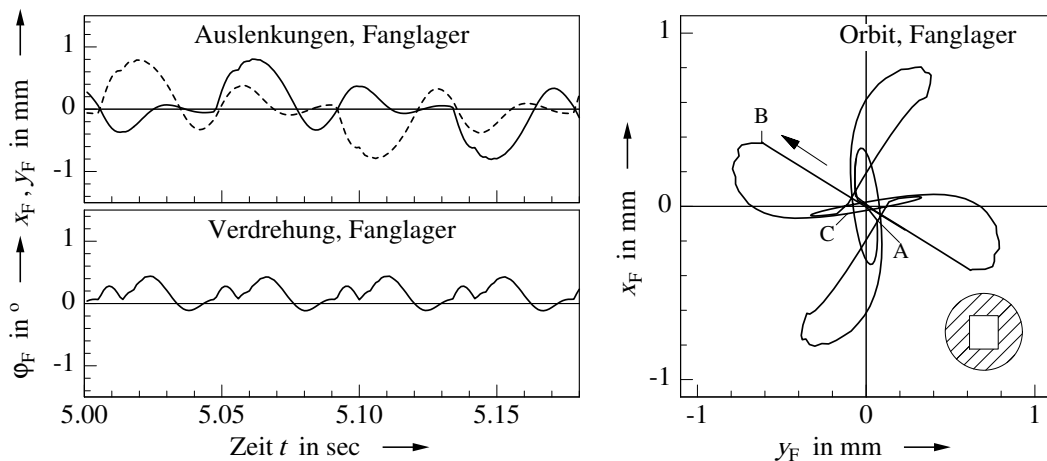


Bild 4.28: Simulation: Periodische Bewegung des vierseitigen Fanglagers mit elastischer Aufhängung. Kontaktbeginn bei (A), zweiter Stoß bei (B), Prellen bis (C). Zeitverläufe: Auslenkungen $x_F(t)$ und (gestrichelt) $y_F(t)$, Verdrehung $\varphi_F(t)$ des Fanglagers. Orbit: $x_W(y_W)$, $x_F(y_F)$. (Parameter wie Bild 4.27).

Fanglager-Zentrums (siehe Fanglager-Orbit in Bild 4.26). Die größte Kontaktkraft tritt beim ersten Stoß auf (Punkt A). Sie ist mit $\tilde{F}_{FL} = 350$ N deutlich geringer als bei starrer Aufhängung des Fanglager (1310 N). Die Kraft in der Fanglager-Aufhängung $F_{Auf}(t)$, also die Kraft die vom Fanglager auf die Umgebung wirkt, ist noch geringer und weist auch keine Stöße auf. Das Maximum beträgt nur $\tilde{F}_{Auf} = 65$ N.

Die Bahnen von Welle und Fanglager besitzen eine zyklische Symmetrie dritter Ordnung. Die Verdrehung des Fanglagers bleibt mit $|\varphi_F| < 0,5^\circ$ äußerst gering.

Ähnliche Ergebnisse liefert das regelmäßige **vierseitige** Fanglager mit elastischer Aufhängung (Parameter: Tabellen C.7 und C.5).

Die Bilder 4.27 und 4.28 zeigen die Ergebnisse der Simulation bei einer Drehzahl von $\Omega/2\pi = 6,00$ Hz.

Wieder erhalten wir eine einschleifige, gegenläufige Bewegung des Wellenmittelpunkts und eine verschlungene Bahn für das Fanglager-Zentrum. Eine Stoßphase besteht aus einzelnen Stößen (A und B) und einer Prellphase (B bis C). Erstaunlich ist, dass die Ordnung der vorhandenen, zyklischen Symmetrie nicht vier sondern nur zwei beträgt. Im vergrößerten Bild 4.28 des Fanglager-Orbits erkennt man, dass eine Drehung um 180° (und nicht um 90°) erforderlich ist, um auf eine identische Abbildung zu kommen. Aus der Symmetrie des Systems können wir allerdings schließen, dass die periodische Bewegung mit einem um 90° gedrehten Orbit ebenfalls stabil sein muss. Welche dieser zwei Lösungen sich einstellt, hängt von den Anfangsbedingungen ab.

Gegenüber dem starr aufgehängten, vierseitigen Fanglager (vgl. mit Bild 4.4) liegt die größte Geschwindigkeit geringfügig höher: $\tilde{v}_W = 0,184$ m/sec (statt $0,181$ m/sec). Die maximale Kontaktkraft von $\tilde{F}_{FL} = 550$ N (statt 1880 N) ist aber deutlich vermindert. Die Kraft in der Aufhängung beträgt maximal $\tilde{F}_{Auf} = 60$ N. Die Verdrehung des Fanglagers bleibt auch jetzt äußerst gering $|\varphi_F| < 0,5^\circ$.

4.3.2 Runde Fanglager

Zum Vergleich wird die selbsterregte gegenläufige Bewegung des Laval-Rotors in einem **runden** Fanglager mit elastischer Aufhängung (Parameter: Tabellen C.8 und C.5) simuliert. Wir verwenden das aufwendigere Kontaktmodell für permanenten Kontakt (Abschnitt 2.2) und wählen Kontaktparameter gemäß der PVC-Hülse (Tabelle C.3). Unwucht und geometrische Exzentrizität werden zu Null gesetzt. Zur Verdeutlichung der Phasenlage wird die Bewegung in den Bildern 4.29 bis 4.31 nur über eine knappe Periode dargestellt.

Für die erste Simulation wählen wir die gleiche Drehzahl $\Omega/2\pi = 6,00$ Hz wie zuvor bei den Simulationen zu polygonförmigen Fanglagern (Bild 4.25 und 4.27). Es kommt zu

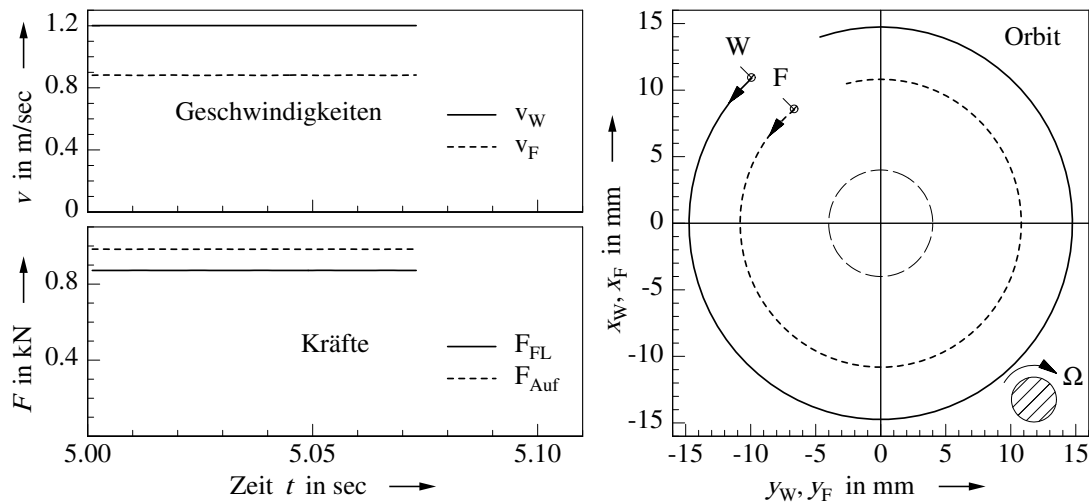


Bild 4.29: Simulation: Periodische Bewegung von Rotor und rundem Fanglager mit elastischer Aufhängung über eine knappe Periode. Unterkritischer Fall ($\omega_{BW} < \omega_{0E}$). Zeitverläufe: Geschwindigkeiten $v_W(t)$ des Wellenmittelpunkts und $v_F(t)$ des Fanglagermittelpunkts, Beträge der Kontaktkraft $F_{FL}(t)$ und der Kraft $F_{Auf}(t)$ in der Fanglager-Aufhängung. Orbit: $x_W(y_W)$, $x_F(y_F)$ und Freiraumgrenze in Referenzlage. (Laval-Rotor ohne Unwucht, $\Omega/2\pi = 6,00$ Hz, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; FL: $f_{0F} = 38,5$ Hz; PVC-Hülse).

einem heftigen *backward whirl*, bei dem Wellenmittelpunkt W und Fanglager-Zentrum F auf konzentrischen Kreisen (Radien ρ_W und ρ_F) mit gleicher Winkelgeschwindigkeit $\omega_{BW} = \omega_{BF}$ umlaufen. Für die Geschwindigkeiten gilt damit

$$v_F = \frac{\rho_F}{\rho_W} v_W . \quad (4.5)$$

Die Auslenkungen laufen nicht genau phasengleich. Das Fanglager-Zentrum eilt dem Wellenmittelpunkt geringfügig nach.

Die radiale Auslenkung der Welle $\rho_W = 14,75$ mm ist um ein Mehrfaches größer als das Fanglagerspiel $s = 4$ mm. Die Auslenkung des Fanglagers beträgt $\rho_F = 10,75$ mm. Der radiale Abstand $|\rho_W - \rho_F|$ zwischen den Bahnen ist durch die Phasenverschiebung und durch die Nachgiebigkeit des Kontakts etwas geringer als das Fanglagerspiel. Das Fanglager verdreht sich im eingeschwungenen Zustand um den konstanten, kleiner Winkel von $\varphi_F = 0,66^\circ$ in Richtung der Drehung Ω der Rotors. Dies resultiert aus den Reibkräften im Kontakt.

Die Geschwindigkeiten sind konstant $v_W(t) = \tilde{v}_W = 1,20$ m/sec, $v_F(t) = \tilde{v}_F = 0,882$ m/sec und erreichen hier die höchsten Werte aller bisherigen Simulationen. Die Bewegung ist weiter durch einen relativ großen, konstanten Schlupf, die tangentielle Relativgeschwindigkeit im Kontakt $v_t = 0,610$ m/sec gekennzeichnet.

Die vorliegende gegenläufige Bewegung von Welle und Fanglager ist vergleichbar mit der

ebenen Bewegung eines Unwuchtschwingers. Die Eigenfrequenz

$$\omega_{0E} = \sqrt{\frac{k_W + k_F}{m_W + m_F}} \quad (4.6)$$

dieses *Ersatz-Schwingers* ergibt sich aus der Gesamtmasse sowie den Steifigkeiten von Welle und Fanglager-Aufhängung. Die Erregung folgt aus dem Umlauf der Welle im Fanglager. Die „Erregerfrequenz“ ω_{BW} ist allerdings abhängig vom Schwingungszustand des Systems. Für die vorliegende gegenläufige Bewegung gilt

$$\omega_{BW}/2\pi = 12,9 \text{ Hz} < \omega_{0E}/2\pi = 14,64 \text{ Hz} .$$

Dies entspricht einem *unterkritischen* Betrieb des Ersatz-Schwingers.

Die konstante Kontaktkraft $F_{FL} = 872 \text{ N}$ und besonders die Kraft in der Fanglager-Aufhängung $F_{Auf} = 983 \text{ N}$ fallen höher aus als die stoßartigen Kräfte in den polygonförmigen Fanglagern (vgl. Bilder 4.25 und 4.27). Die Kraft in der Aufhängung liegt hier über der Kontaktkraft. Die Differenz kommt hauptsächlich aus der Trägheitskraft des Fanglagers. In guter Näherung gilt

$$F_{Auf} - F_{FL} = 111 \text{ N} \approx m_F \frac{v_F^2}{\rho_F} = 112,5 \text{ N} .$$

Bei den entsprechenden Experimenten zum runden, nachgiebigen Fanglager konnten wir die Drehzahl nur bis maximal 3,5 Hz hochfahren, ohne Zerstörungen befürchten zu müssen. Bild 4.30 zeigt daher eine Simulation bei einer verminderten Drehzahl $\Omega/2\pi = 1,50 \text{ Hz}$, die mit der Messung (Bild 6.13) verglichen werden kann.

Wir erhalten eine stationäre gegenläufige Bewegung (*backward whirl*) mit deutlich geringeren Auslenkungen ($\rho_W = 5,8 \text{ mm}$, $\rho_F = 1,7 \text{ mm}$, $\varphi_F = 0,02^\circ$) und Geschwindigkeiten ($\tilde{v}_W = 0,33 \text{ m/sec}$, $\tilde{v}_F = 0,10 \text{ m/sec}$). Die Kontaktkraft $F_{FL} = 157 \text{ N}$ und die Kraft in der Aufhängung $F_{Auf} = 148 \text{ N}$ sind deutlich vermindert. Der Schlupf $v_t = 0,002 \text{ m/sec}$ ist äußerst gering.

4.3.3 Einfluss von Fanglagermasse und –Aufhängung

Man kann durch die Wahl der Fanglagermasse und der Steifigkeit der Aufhängung die Eigenfrequenzen ω_{0F} des Fanglagers und ω_{0E} des Ersatz-Schwingers (Gl. (4.6)) ändern. Wir erhöhen die Fanglagermasse $m_F = 5,00 \text{ kg}$ (statt 1,55 kg) und wählen eine nachgiebigere Aufhängung $k_F = 5,00 \text{ N/mm}$ (statt 90,74 N/mm). Damit erhalten wir eine reduzierte Eigenfrequenz $\omega_{0F}/2\pi = 5,03 \text{ Hz}$ des Fanglagers (statt 38,5 Hz) sowie eine Eigenfrequenz des Ersatz-Schwingers von $\omega_{0E}/2\pi = 4,8 \text{ Hz}$ (statt 14,64 Hz). Die übrigen Parameter sind

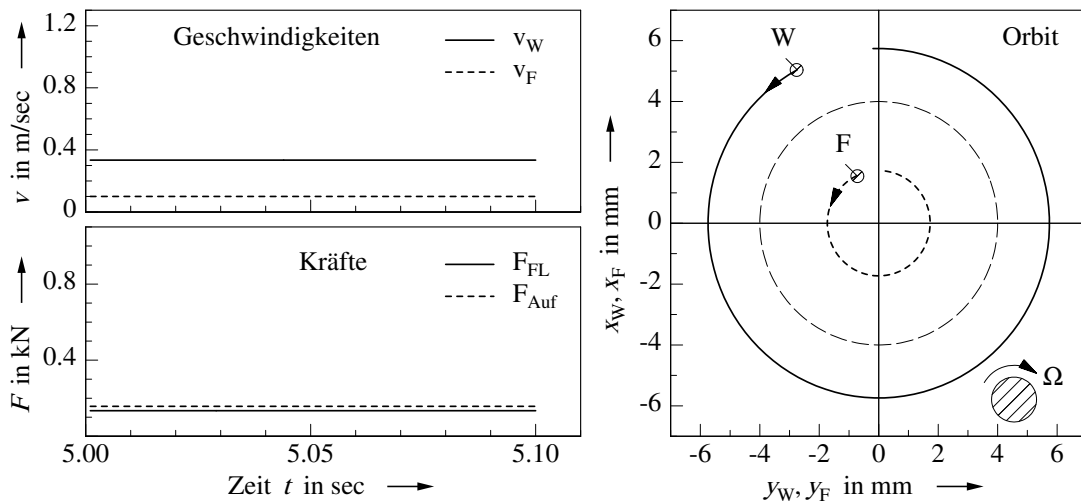


Bild 4.30: Simulation: Selbsterregte, gegenläufige Bewegung von Rotor und rundem Fanglager mit elastischer Aufhängung. Gegenüber Bild 4.29 wurde die Drehzahl auf $\Omega/2\pi = 1,50$ Hz vermindert.

identisch zur Simulation in Bild 4.29, mit der wir die Änderungen der Bewegung vergleichen wollen.

Wieder stellt sich eine selbsterregte gegenläufige Bewegung mit einem permanenten Kontakt ein (siehe Bild 4.31). Wellenmittelpunkt und Fanglager-Zentrum laufen auf deutlich kleineren konzentrischen Bahnen, diesmal allerdings in Gegenphase. Weiter fällt auf, dass die Auslenkung $\rho_W = 1,3$ mm der Welle jetzt kleiner ausfällt als die Auslenkung $\rho_F = 2,7$ mm des Fanglagers. Hier findet sich das Massenverhältnis m_F/m_W von etwa 1:2 wieder. Welle und Fanglager rotieren (bei überkritischem Betrieb) nahezu um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Für die Geschwindigkeiten finden wir das gleiche Verhältnis von $\tilde{v}_W = 0,31$ m/sec zu $\tilde{v}_F = 0,63$ m/sec wie für die Massen. Hieraus ergibt sich die Umlauffrequenz des Gegenlaufs ω_{BW} , die über der Eigenfrequenz ω_{0E} des Ersatz-Schwingers liegt.

$$\omega_{BW}/2\pi = 12,5 \text{ Hz} > \omega_{0E}/2\pi = 4,8 \text{ Hz} .$$

Wir sind im *überkritischen* Bereich. Durch diese Maßnahme konnte die Kontaktkraft $F_{FL} = 722$ N leicht und die Kraft $F_{Auf} = 45,3$ N in der Aufhängung erheblich gegenüber dem unterkritischen Betrieb reduziert werden.

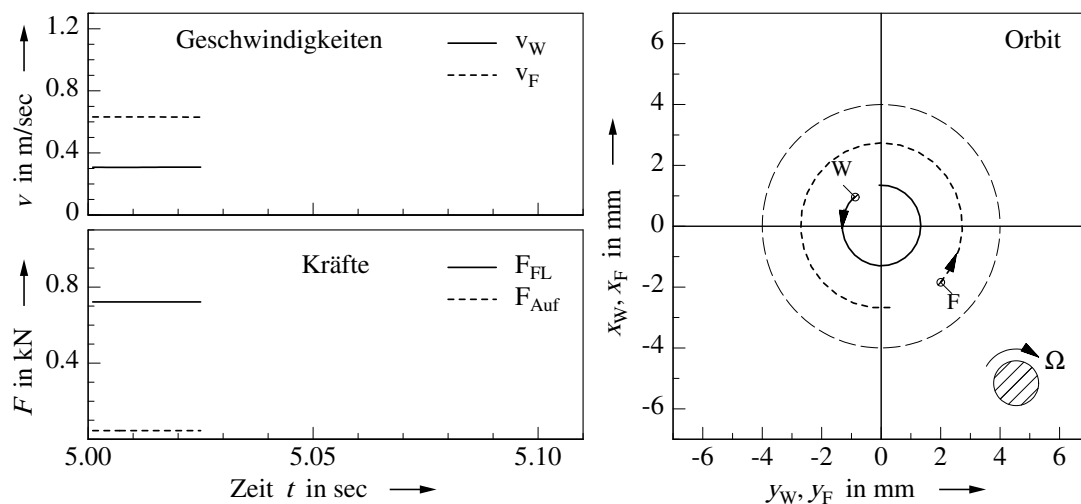


Bild 4.31: Simulation: Selbsterregte gegenläufige Bewegung von Rotor und rundem Fanglager mit elast. Aufhängung über eine knappe Periode. **Überkritischer Fall** ($\omega_{BW} > \omega_{0E}$). Zeitverläufe: Geschwindigkeiten $v_W(t)$ des Wellenmittelpunkts und $v_F(t)$ des Fanglager-Zentrums, Beträge der Kontaktkraft $F_{FL}(t)$ und der Kraft $F_{Auf}(t)$ in der Fanglager-Aufhängung. Orbit: $x_W(y_W)$, $x_F(y_F)$ und Freiraumgrenze in Referenzlage. (Laval-Rotor ohne Unwucht, $\Omega/2\pi = 6,00$ Hz, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; FL: $m_F = 5,00$ kg, $k_{xF} = k_{yF} = 5,00$ N/mm, $f_{0F} = 5,03$ Hz; PVC-Hülse).

4.4 Resonanzdurchfahrt bei verschiedenen Fanglagern

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Bewegung eines unwuchtigen Laval-Rotors, der beim transienten Resonanzdurchgang an ein Fanglager stößt. Wir geben die Winkelbeschleunigung zu jedem Zeitpunkt fest vor und beschränken uns — passend zu unserem Versuchsstand — auf gleichmäßig beschleunigte Hoch- und Ausläufe des Rotors ($\dot{\Omega} = \text{const}$). Es ist hier nicht der Anfangszustand, der zu einem ersten Kontakt mit dem Fanglager führt, sondern eine allmählich anwachsende Schwingung aufgrund einer Unwucht. Bis zum ersten Kontakt ist die Bewegung identisch mit einer solchen, die der unwuchtige Laval-Rotor ohne Fanglager beschreibt (vgl. Bild 4.2).

Für die Simulation wählen wir eine Winkelbeschleunigung von $\dot{\Omega}/2\pi = \pm 0,20$ Hz. Innerhalb der Simulationszeit von 50 sec wird der Rotor aus dem Stand auf eine Drehzahl von $\Omega/2\pi = 10,00$ Hz beschleunigt oder umgekehrt von dieser Drehzahl zum Stillstand gebracht. Etwa zur Hälfte der Simulationszeit wird die kritische Drehzahl $\Omega_{krit}/2\pi = \omega_0/2\pi = 4,70$ Hz) erreicht. Wir wählen eine Massenexzentrizität von $e_S = 0,37$ mm.

4.4.1 Polygonförmige Fanglager

Bild 4.32 zeigt das Resultat für das gleichförmige, dreiseitige Fanglager (Parameter: Tabelle C.6) mit starrer Aufhängung.

In den ersten Sekunden der Simulationen, jeweils links in den Diagrammen, zeigen die Lösungen abklingende Eigenschwingungen, die vom Anfangszustand herrühren. Der erste Kontakt mit dem Fanglager erfolgt beim Hoch- wie beim Auslauf etwas vor dem Erreichen der kritischen Drehzahl. Es schließt sich eine Kontaktphase mit zahlreichen Stößen an. Schließlich löst sich der Rotor wieder vom Fanglager. Die Auslenkungen nehmen wieder ab. Beim Hochlauf ist die Länge und Intensität der Kontaktphase deutlich größer als beim Auslauf. Am Ende der Kontaktphase im Bereich (a) treten die größten Kontaktkräfte auf. Sie erreichen Werte von $\tilde{F}_{FL} = 2890$ N. Deutlich erscheinen in diesem Bereich (a) größere radiale Auslenkungen ρ_W . Sie sind jedoch in diesem Ausmaß nicht auf eine größere Eindringung zurückzuführen. Stattdessen erreicht der Wellenmittelpunkt — in den Phasen ohne Kontakt — Auslenkungen dieser Größe in den Ecken des Fanglagers. Bild 4.33 zeigt die unregelmäßige Rotorbewegung in diesem Bereich.

4.4.2 Runde Fanglager

Wir führen die gleichen Rechnungen auch mit einem runden Fanglager (Parameter: Tabelle C.8) durch. Die Kontaktphase beim Hochlauf beginnt mit einigen Stößen und führt dann auf eine gefährliche Gegenlauf-Bewegung (*backward whirl*). Die Kontaktkraft steigt sprunghaft an und wächst dann mit zunehmender Drehzahl quadratisch. Die Welle kann sich nicht mehr vom Fanglager lösen. Am Ende des Hochlaufs erreicht die Kontaktkraft einen Betrag von 6000 N. Wieder fällt die Kontaktphase beim Auslauf des Rotors schwächer aus. Es entwickelt sich kein *backward whirl* (siehe Bild 4.34) und der Rotor kann sich wieder sehr schnell vom Fanglager lösen.

In dem zu dieser Simulation gehörenden Experiment (vgl. Bild 6.15) mussten wir den Rotor beim Hochlauf kurz nach Beginn des *backward whirl* (not-)bremsen um Schäden zu vermeiden. Bei größerer Reibung oder langsamerer Durchfahrt kann es auch beim Auslauf zum *backward whirl* kommen. Umgekehrt ist es auch möglich, durch schnelleres Durchfahren der kritischen Drehzahl einen *backward whirl* zu vermeiden oder so stark zu mindern, dass sich die Welle vom Fanglager lösen kann (siehe Bild 4.35).

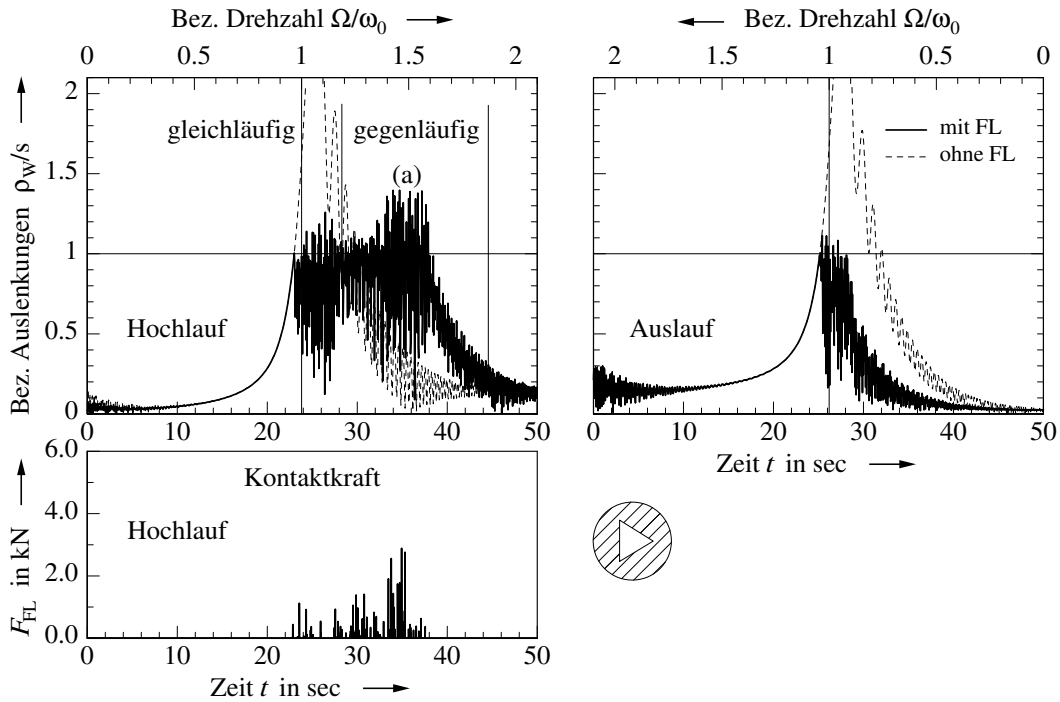


Bild 4.32: Simulation: Transienter Resonanzdurchlauf bei **dreiseitigem**, starr aufgehängtem Fanglager. Bezogene Rotorauslenkung ρ_W/s , ($s = 4$ mm) und Kontaktkraft F_{FL} . Gleichmäßig beschleunigter Hoch- und Auslauf in jeweils 50 sec ($\Omega_{max}/2\pi = 10,00$ Hz, $\dot{\Omega}/2\pi = \pm 0,20$ Hz/sec). Zum Vergleich: Auslenkung ohne Fanglager (gestrichelt). Bereich (a) siehe Bild 4.33. (Laval-Rotor, Massenexzentrizität $e_S = 0,37$ mm, geom. Exzentrizität $e_L = 0,10$ mm, Eigenfrequenz $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz).

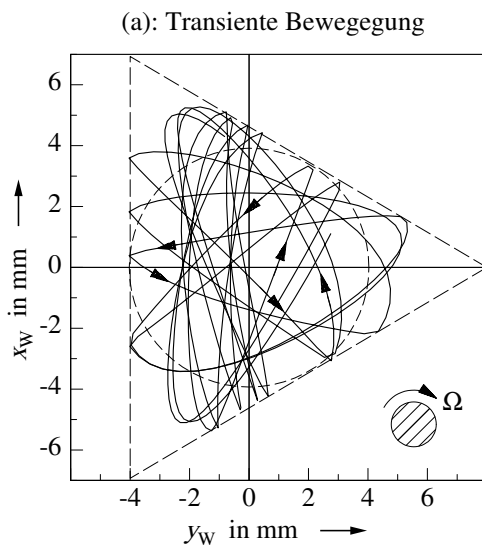


Bild 4.33: Gegenläufige Rotorbewegung in dreiseitigem Fanglager beim transienten Hochlauf im Bereich (a) aus Bild 4.32. Der Wellenmittelpunkt erreicht hier in den Phasen ohne Kontakt Auslenkungen, die deutlich größer sind als das Fanglagerspiel s (Kreis). (Parameter wie Bild 4.32; $\Omega/2\pi = 7,00 \dots 7,50$ Hz).

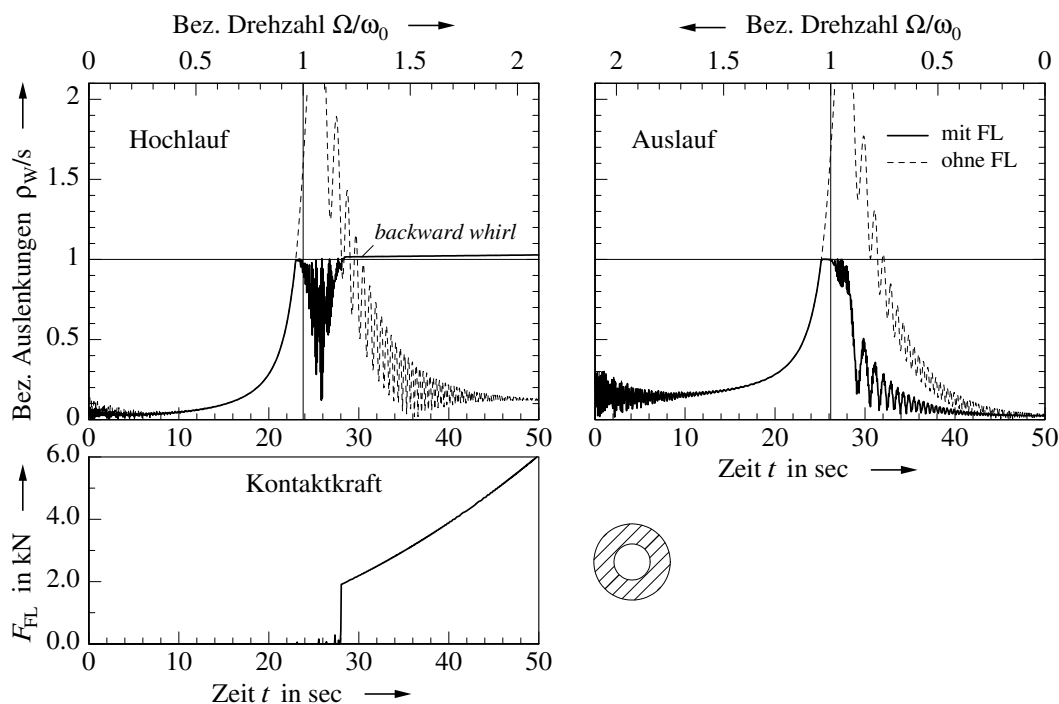


Bild 4.34: Simulation: Transienter Resonanzdurchlauf bei **rundem** Fanglager. Bez. Rotorauslenkung ρ_W/s , ($s = 4$ mm) und Kontaktkraft F_{FL} . Hoch- und Auslauf jeweils 50 sec ($\dot{\Omega}/2\pi = \pm 0,20$ Hz/sec). Auslenkung ohne FL (gestrichelt). (Laval-Rotor, Massenexzentr. $e_S = 0,37$ mm, geom. Exzentr. $e_L = 0,10$ mm, Eigenfreq. $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz).

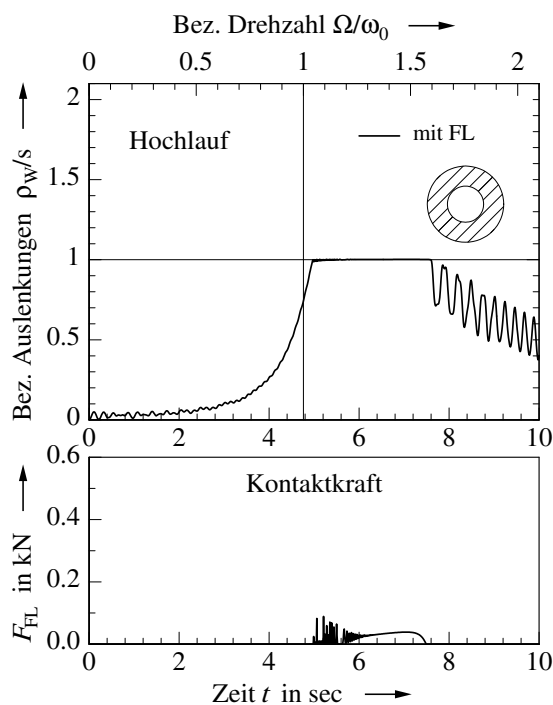


Bild 4.35: Simulation: Transienter Resonanzdurchlauf mit rundem Fanglager. Bei **schnellem Hochlauf** (hier in 10 sec) löst sich die Welle wieder vom Fanglager ($\dot{\Omega}/2\pi = \pm 1,00$ Hz/sec). Bezogene Rotorauslenkung ρ_W/s , ($s = 4$ mm) und Kontaktkraft F_{FL} . (Laval-Rotor, Massenexzentrizität $e_S = 0,37$ mm und geom. Exzentrizität $e_L = 0,10$ mm, Eigenfrequenz $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz).

Kapitel 5

Numerische Ergebnisse zum Pendelrotor

In diesem Abschnitt zeigen wir numerische Ergebnisse für die Bewegung eines Pendelrotors mit einem Fanglager (Modell nach Abschnitt 2.6, Bewegungsgleichung (2.58)).

Der wesentliche Unterschied zum Laval-Rotor ist durch das Hinzutreten der Kreiselmomente gegeben. Diese Eigenschaft hat Auswirkungen auf die Bewegung des Rotors im Fanglager. Dieser Einfluss soll nun untersucht werden.

5.1 Bewegungen ohne Fanglagerkontakt

Ohne Fanglager kann der Pendelrotor als ein schwerer Kreisel beschrieben werden (vgl. Abschnitt 2.6).

Ohne Rotation fallen die zwei Eigenfrequenzen der Pendelbewegung zusammen. Für kleine Pendelausschläge gilt (vgl. Gl. 2.53 und 2.54):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_W}{m_W}} = \sqrt{\frac{m_R g \ell_{AS'}}{J_{xA}}} \quad (5.1)$$

Unser Versuchsrotor besitzt eine Eigenfrequenz von $f_0 = \omega_0/2\pi = 0,76$ Hz.

Aufgrund der gyroskopischen Terme trennen sich die zwei Eigenfrequenzen mit zunehmender Drehzahl voneinander.

Die erste, tiefere Eigenfrequenz $\omega_{01}(\Omega)$ strebt mit wachsender Drehzahl gegen Null. Sie gehört zu einem *Gegenlauf*, bei der die Figurenachse einen Kegel gegen die Drehrichtung des Rotors beschreibt. Diese Bewegung wird in der Theorie der Kreisel als *reguläre Präzession* bezeichnet (vgl. MAGNUS (1971), [43], Abschnitt 3.2.1).

Die zweite Eigenfrequenz $\omega_{02}(\Omega)$ nähert sich mit wachsender Drehzahl dem Wert $(J_z/J_{xA})\Omega$ an. Die zugehörige Eigenschwingung, ein *Gleichlauf*, wird als *Nutation* bezeichnet. Eine Nutation findet man auch bei einem kräftefreien Kreisel.

Unser Pendelrotor gilt als *langgestreckt* ($J_z < J_{xA}$). Unter dieser Voraussetzung findet man zwei kritische Drehzahlen. Bei scheibenförmigen Rotoren dagegen wächst $\omega_{02}(\Omega)$ schneller als Ω selbst. Die Drehzahl kann also diese Eigenfrequenz nie erreichen.

Im Allgemeinen wird die Präzession von der höherfrequenten, oft kleineren Nutation überlagert; man spricht dann von *pseudoregulärer Präzession*. Innere Dämpfung oder Reibung in rotierenden Teilen (Kupplung im Aufhängepunkt) können zur Anfachung dieser Eigenschwingungen führen. Bei Unwucht tritt noch eine erzwungene Schwingung hinzu. Die Bewegung des Pendelrotors setzt sich dann aus drei Anteilen verschiedener Frequenz zusammen.

5.2 Periodische Bewegungen bei verschiedenen Fanglagern

Wir halten die Drehzahl fest ($\Omega = \text{const}$) und untersuchen die Bewegung des Pendelrotors (Parameter: Tabelle C.2) beim Kontakt mit verschiedenen Fanglagern. Die Wahl der Anfangsbedingungen sorgt für den ersten Kontakt zwischen Rotor und Fanglager. Wieder kann man feststellen, dass in einem weiten Parameterbereich periodische Bewegungen entstehen. In der Regel sind diese selbsterregten Bewegungen des Rotors gegenläufig.

5.2.1 Polygonförmige Fanglager

Zunächst erhält der Pendelrotor das regelmäßige, dreiseitige Fanglager mit starrer Aufhängung (Parameter: Tabelle C.6). Die Kontaktparameter wählen wir entsprechend der PVC-Hülse (Tabelle C.3). Massenexzentrizität und geometrische Exzentrizität werden zu Null gesetzt.

Wir simulieren die Bewegung bei einer Drehzahl von $\Omega/2\pi = 6,00$ Hz (siehe Bild 5.1). Gegenüber dem Laval-Rotor beobachten wir eine deutlich längere Einschwingphase. Die anschließende selbsterregte gegenläufige Bewegung besitzt einen einschleifigen Orbit mit zyklischer Drehsymmetrie. Ihre größte Geschwindigkeit $\tilde{v}_W = 0,023$ m/sec und die Kontaktkraft $\tilde{F}_{FL} = 210$ N fallen etwa ein Fünftel mal geringer aus als beim Laval-Rotor (vgl. mit Bild 4.3). Die Kreiselmomente sorgen für einen weiteren Unterschied gegenüber dem Laval-Rotor. Die Bahn der Welle zeigt eine andere Krümmung (in Bewegungsrichtung nach rechts). Zwischen den Stößen liegt die Bahn damit dichter am Ursprung.

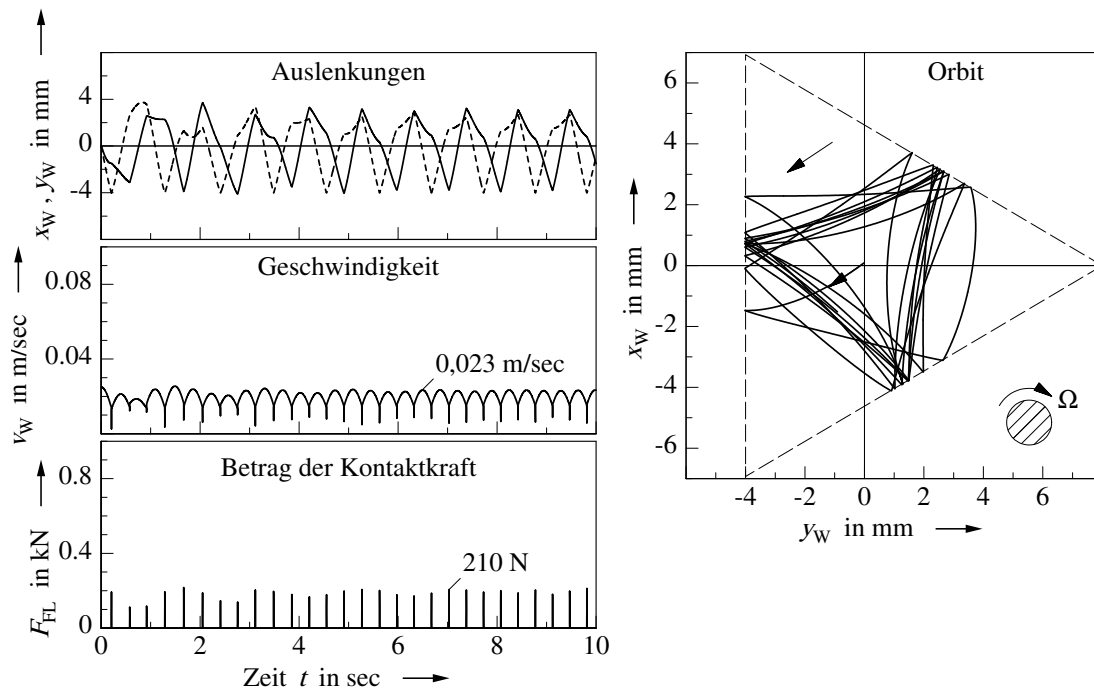


Bild 5.1: Simulation: Einschwingvorgang und schließlich selbsterregte gegenläufige Bewegung des Pendelrotors in dreiseitigem Fanglager. Zeitverläufe: Rotorauslenkungen $x_W(t)$ und (gestrichelt) $y_W(t)$, Geschwindigkeit $v_W(t)$ des Wellenmittelpunkts sowie Betrag der Kontaktkraft $F_{FL}(t)$. Orbit: $x_W(y_W)$. (Keine Exzentrizität, $\Omega/2\pi = 6,00$ Hz, $\omega_0/2\pi = 0,76$ Hz; starr gel. FL; PVC-Hülse).

5.2.2 Runde Fanglager

Die Simulation vom Pendelrotor mit einem runden Fanglager (Parameter: Tabelle C.8) mit starrer Aufhängung ergibt dagegen keine wesentlichen Unterschiede zum Laval-Rotor. Es kommt zu einem heftigen *backward whirl* (siehe Bild 5.2), der in unserem Versuchsstand sehr wahrscheinlich zu Zerstörungen geführt hätte.

Der Einschwingvorgang dauert mit etwa 4 Sekunden auch hier deutlich länger als beim Laval-Rotor. Die Geschwindigkeit im stationären Zustand $\tilde{v}_W = 0,939$ m/sec finden wir wieder ganz knapp unter dem Wert für reines Abrollen ($\Omega r = 0,943$ m/sec). Die größere Masse des Pendelrotors führt entsprechend zu einer größeren Kontaktkraft $\tilde{F}_{FL} = 3360$ N (vgl. mit Bild 4.6), die mit einer Frequenz von $\omega_{BW}/2\pi = 37,4$ Hz umläuft.

Der Vorteil des dreiseitigen Fanglagers gegenüber dem runden Fanglager wird hier noch deutlicher als beim Laval-Rotor. In unseren Versuchen konnten wir den Pendelrotor mit dem runden Fanglager nur bis zu einer Drehzahl von maximal $\Omega/2\pi = 3,0$ Hz sicher betreiben. Selbst dabei traten heftige Schwingungen am Versuchsstand auf. Laut Simulation entsteht dann eine Kontaktkraft von 850 N, die mit 18,8 Hz gegen die Drehung des Rotors umläuft.

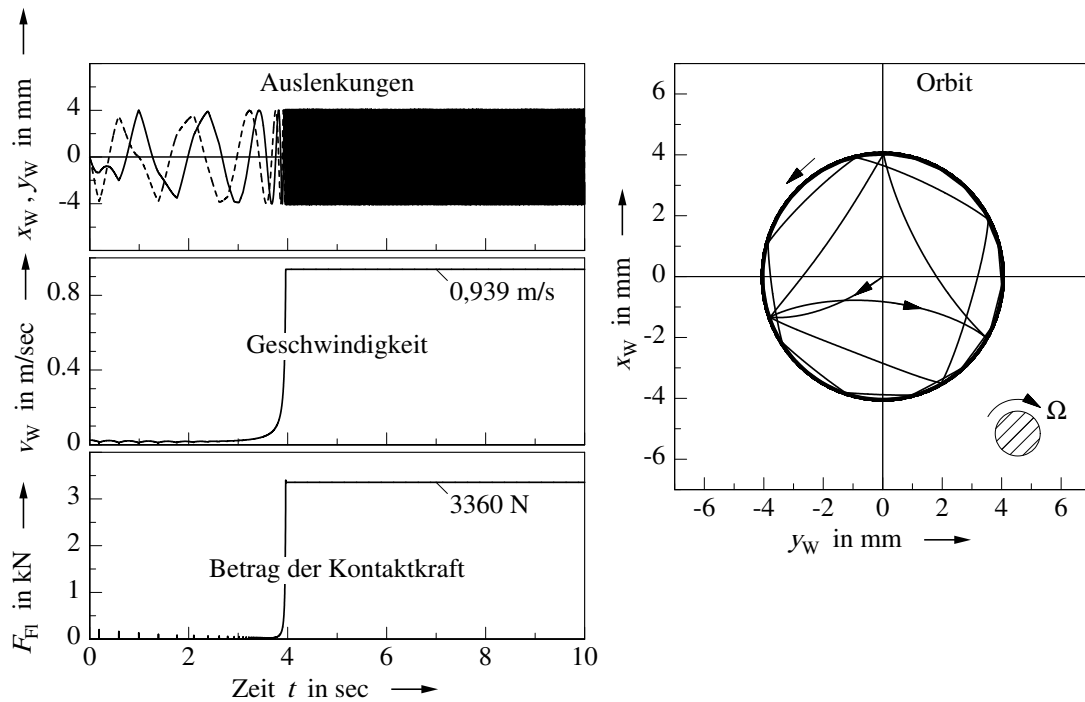


Bild 5.2: Simulation: Einschwingvorgang und schließlich selbsterregte gegenläufige Rotorbewegung (*backward whirl*) in rundem Fanglager. Zeitverläufe: Rotorauslenkungen $x_W(t)$ und (gestrichelt) $y_W(t)$, Geschwindigkeit $v_W(t)$ des Wellenmittelpunkts sowie Betrag der Kontaktkraft $F_{FL}(t)$. Orbit: $x_W(y_W)$. (Pendelrotor ohne Exzentrizität, $\Omega/2\pi = 6,00$ Hz, $\omega_0/2\pi = 0,76$ Hz; starr gel. FL; PVC-Hülse).

5.2.3 Kurvenkreisel

Bei sehr großen Kreiselmomenten kann es passieren, dass der Pendelrotor mit der Welle an den Flächen des polygonförmigen Fanglagers entlangläuft (*gyroscopic tracking*). In einem solchen Fall spricht man von einem *Kurvenkreisel* (vgl. [44] und [46]).

Unser Modell ist bei spezieller Wahl der Parameter in der Lage eine solche Bewegung zu beschreiben: Wir gehen von den Standard-Parametersätzen im Anhang C aus (Pendelrotor ohne Exzentrizität; dreiseitiges Fanglager mit starrer Aufhängung, PVC-Hülse) und ändern folgende Parameter: $\Omega/2\pi = 0,50$ Hz; $m_W = 10$ kg (statt 15,33 kg); $g_{xy} = 20$ kg (statt 1,312 kg); $k_W = 0$ (statt 352,0 N/m); $r = 1$ mm (statt 25 mm); $\mu_0 = \mu_1 = 0,30$ (statt 0,19 bzw. 0,17).

Bild 5.3 zeigt einen Einschwingvorgang und schließlich eine periodische Lösung des Kurvenkreisels. Kreiselmomente drücken den Rotor gegen die Fangfläche. Die Reibkräfte treiben ihn dann vorwärts. Dabei erfährt die Drallachse eine Änderung ihrer Richtung. Hierdurch entsteht wiederum das Kreiselmoment. Eine geschlossenen Kurve kann dabei auf der Innen- oder Außenseite abgefahren werden. Das Abfahren der Kurven-Außenseite führt auf eine

gleichläufige, das Abfahren einer Innenseite auf eine gegenläufige Bewegung.

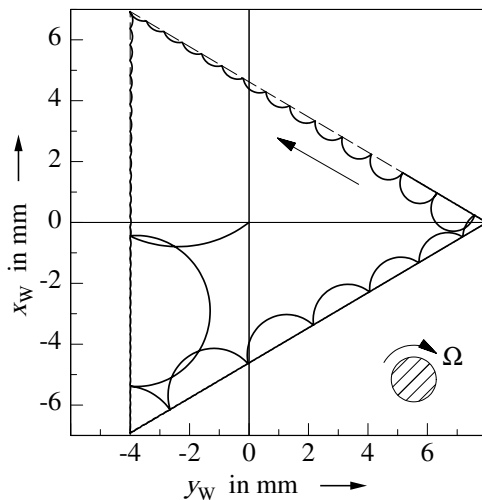


Bild 5.3: Das Simulationsmodell für den Pendelrotor beschreibt bei entsprechender Wahl der Parameter die Bewegung eines Kurvenkreisels. Nach dem Einschwingvorgang stellt sich eine selbsterregte periodische Gegenlauf-Bewegung ein. Die Welle läuft auf der vorgegebenen Kurve um (*gyroscopic tracking*)($\Omega/2\pi = 0,50$ Hz).

5.3 Chaotische Bewegungen bei polygonförmigen Fanglagern

Wir wollen den Einfluss der Drehzahl auf die eingeschwingene Gegenlauf-Bewegung des Pendelrotors im dreiseitigen Fanglager untersuchen. Im Abschnitt 4.2.7 haben wir schon gesehen (Bild 4.17), dass in bestimmten Drehzahlbereichen bestimmte Typen von periodischen Bewegungen existieren. Bei sehr hohen Drehzahlen waren unregelmäßige Bewegungen zu beobachten. Wir untersuchen dieses Phänomen zunächst am unwuchtfreien Pendelrotor im starr aufgehängten dreiseitigen Fanglager (Kontaktparameter: Gummi-Hülse, Tabelle C.4). Wie zuvor führen wir in einer Programmschleife eine Vielzahl von Simulationen durch (hier etwa 52000), bei denen die Drehzahl im Bereich von $\Omega = 1,0 \dots 45$ Hz in unterschiedlich großen Schritten $\Delta\Omega = 0,0005 \dots 0,1$ Hz verändert wird. Wir ermitteln die eingeschwingene Bewegung des Rotors und tragen die so genannten Fixpunkte über der Drehfrequenz f des Rotors auf (siehe Bild 5.4). Als Fixpunkte wählen wir wieder die Stellen x_3 , an denen die Welle auf die senkrechte Fangfläche 3 trifft.

In der Theorie des *deterministischen Chaos* heißen diese Diagramme *Bifurkationsdiagramme* oder *Feigenbaumdiagramme* (vgl. [36], [71], [76], [77] und [89]). Der Parameter, der verändert wird (hier die Drehzahl), heißt *Bifurkationsparameter*. Aus dem Diagramm kann man ablesen, bei welchen Drehzahlen periodische Lösungen welchen Typs existieren und in welchen Bereichen eine unregelmäßige, *chaotische* Bewegung auftritt.

Bei niedrigen Drehzahlen bis $\Omega = \lambda_1$ existiert eine einschleifige, periodische Gegenlauf-Bewegung. Dann kommt es an der ersten Bifurkationsstelle λ_1 zur einer ersten Perioden-

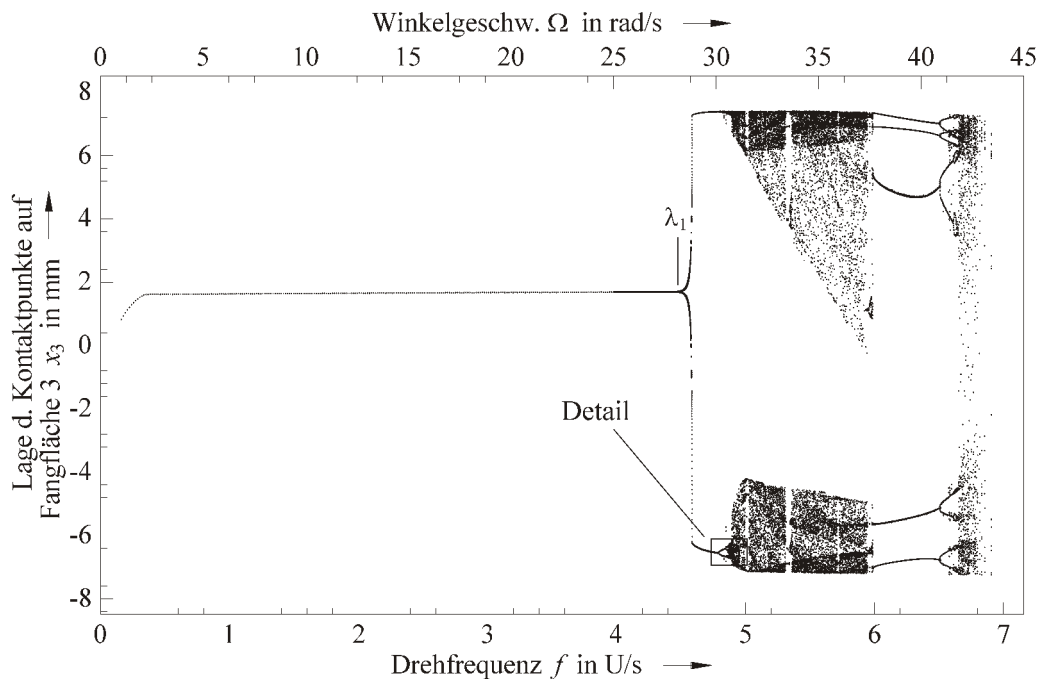


Bild 5.4: Feigenbaumdiagramm: Pendelrotor ohne Exzentrizität in dreiseitigem Fanglager. Die Lage x_3 der Kontaktpunkte auf der Fangfläche 3 gibt Aufschluss über unterschiedliche Arten der Rotorbewegung. Detail-Vergrößerung, siehe Bild 5.5. ($\omega_0/2\pi = 0,76$ Hz; starr gel. FL; Gummi-Hülse).

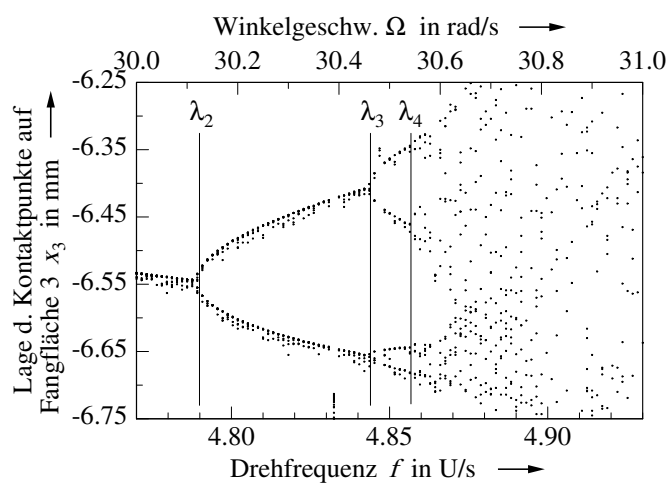


Bild 5.5: Feigenbaumdiagramm (Detail aus Bild 5.4): Lage der Bifurkationsstellen λ_2 bis λ_4 .

verdoppelung. Wir finden jetzt einen zweiseitigen gegenläufigen Orbit mit zwei Auftreffpunkten je Fangfläche (siehe Bild 5.6, links). In immer engeren Abständen folgen theoretisch unendlich viele weitere Bifurkationsstellen λ_i . An jeder Stelle verdoppelt sich die Anzahl der Auftreffpunkte. Der vergrößerte Ausschnitt in Bild 5.5 lässt die Bifurkationsstellen λ_2 bis λ_4 erkennen. Die *Bifurkationskaskade* nähert sich beliebig dicht einer festen Stelle, dem Feigenbaumpunkt λ_∞ . Rechts vom Feigenbaumpunkt beginnt das so genannte *deterministische Chaos*. Die simulierten Bewegungen sind streng determiniert, erscheinen aber unregelmäßig (chaotisch). Ein identischer Anfangszustand führt die Simulation immer wieder genau auf dieselbe Lösungskurve. Kleinste Variationen des Anfangszustands allerdings führen innerhalb kürzester Zeit auf eine andere Lösung. Auch nach sehr langen Integrationszeiten stellt sich keine periodische Lösung ein. Bild 5.7 zeigt eine chaotische Rotorbewegung.

Bifurkationskaskaden als Vorläufer auf dem Weg ins Chaos sind von vielen Systemen aus den unterschiedlichsten Wissensgebieten bekannt. Das Verhältnis zweier aufeinander folgender Bifurkations-Abstände nähert sich stets einem festen, immer gleichen Wert an. Hier taucht eine universelle Naturkonstante auf, die *Feigenbaum-Konstante* δ . Sie ist definiert als

$$\delta = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{\lambda_{i+2} - \lambda_{i+1}} = 4,66920\dots \quad (5.2)$$

In unserem Fall erhalten wir für die ersten Abstandsverhältnisse $\delta_1 = 4,4$ und $\delta_2 = 4,3$.

Im chaotischen Gebiet tauchen helle Streifen, so genannte Fenster auf, in denen wieder eine streng periodische Lösung existiert. Eine solche vielschleifige Bewegung, die in dem besonders breiten Fenster bei $\Omega/2\pi = 6,40$ Hz auftaucht, ist im Bild 5.6 rechts dargestellt. Interessant ist, dass diese selbsterregte Bewegung gleichläufig ist.

Einfluss der Exzentrizität

Tritt — wie bei unserem Versuchsstand — eine geometrische Exzentrizität in der Aufhängung des Pendelrotors hinzu, so ändert sich das Feigenbaumdiagramm (siehe Bild 5.8). Im tiefen Drehzahlbereich erhalten wir eine quasi-periodische Lösung des Gegenlaufs und im chaotischen Bereich öffnen sich weite Fenster in denen streng periodische, subharmonische Bewegungen existieren, die gleich- oder gegenläufig sein können.

Bild 5.9 zeigt eine Bewegung aus dem chaotischen Gebiet bei einer Drehzahl $\Omega/2\pi = 10,00$ Hz. Auch wenn man in den chaotischen Bereichen den zeitlichen Ablauf der Bewegungen eines Rotors nicht vorhersagen kann, so macht eine Simulation dennoch Sinn. Es lassen sich nämlich Abschätzungen der zu erwartenden Geschwindigkeiten und Kräfte gewinnen, denn diese Größen bleiben ähnlich wie auch die Auslenkungen des Rotors beschränkt.

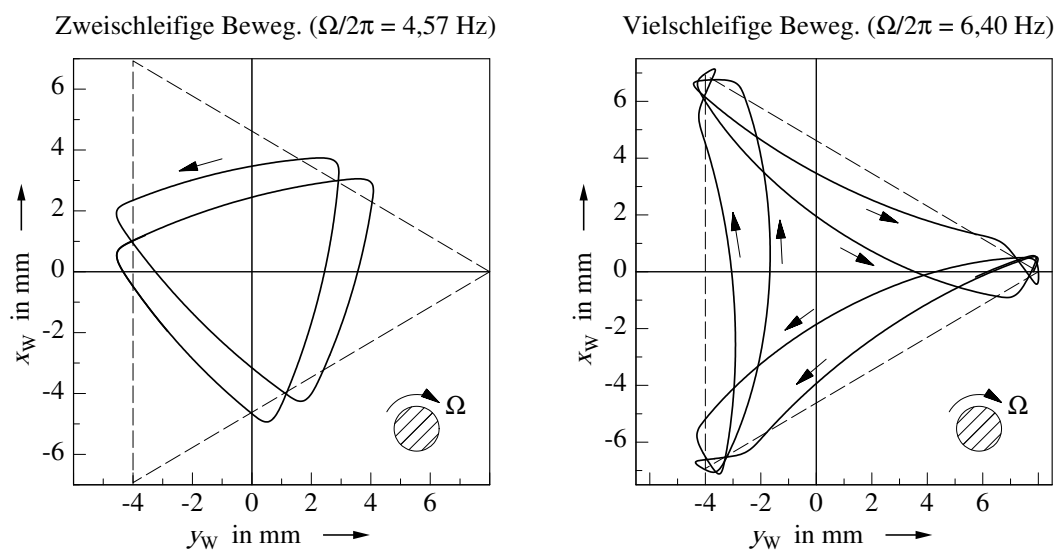


Bild 5.6: Zweischleifige Gegenlauf- und vielschleifige Gleichlauf-Bewegung. (Pendelrotor ohne Exzentrizität, $\omega_0/2\pi = 0,76$ Hz; starr gel. FL; Gummi-Hülse).

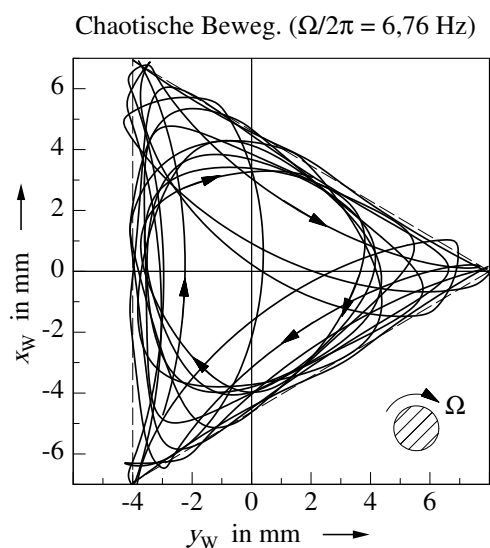


Bild 5.7: Deterministisches Chaos: Unregelmäßige Rotorbewegung. (Pendelrotor ohne Exzentrizität, $\omega_0/2\pi = 0,76$ Hz; starr gel. FL; Gummi-Hülse).

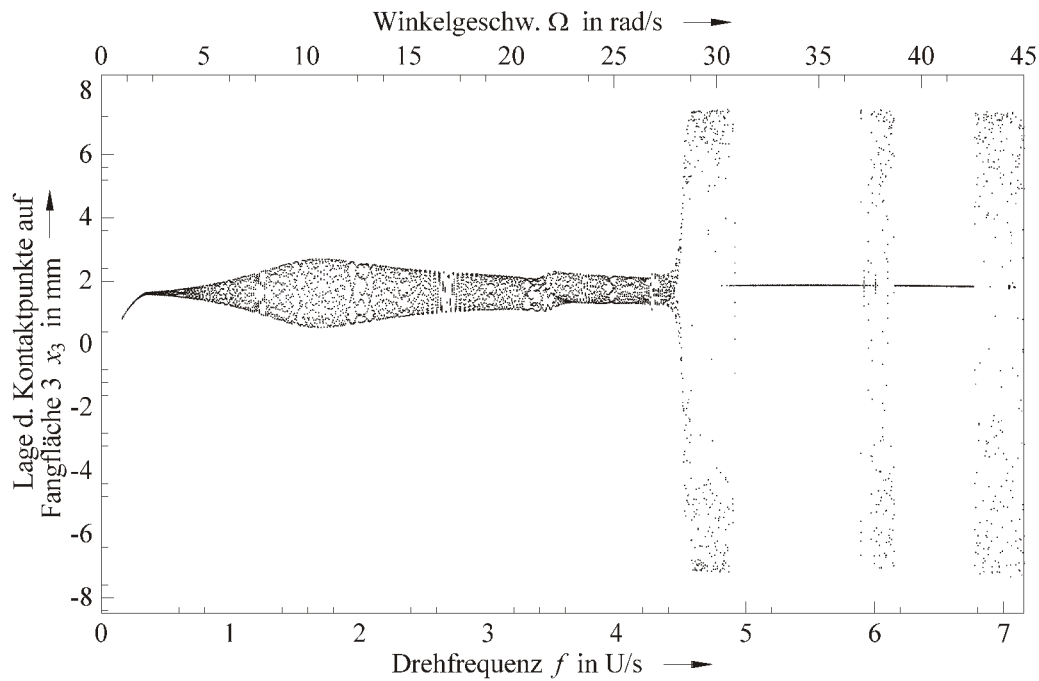


Bild 5.8: Feigenbaumdiagramm: Pendelrotor mit exzentrischer Aufhängung und dreiseitigem Fanglager. (geom. Exzentrizität $e_L = 0,55$ mm, $\omega_0/2\pi = 0,76$ Hz; starr gel. FL; Gummi-Hülse).

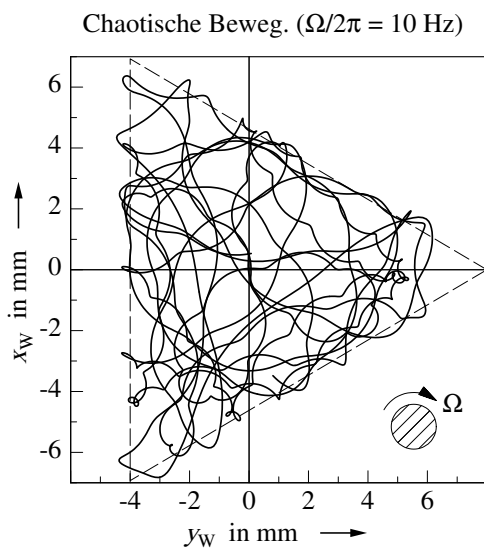


Bild 5.9: Chaotische Rotorbewegung bei exzentrischer Aufhängung. (Pendelrotor, $\Omega/2\pi = 10,0$ Hz, $e_L = 0,55$ mm, $\omega_0/2\pi = 0,76$ Hz; starr gel. FL; Gummi-Hülse).

Kapitel 6

Messungen am Versuchsstand

In diesem Kapitel zeigen wir Messergebnisse, die wir an einem Rotor-Versuchsstand (siehe Bild 6.1) gewonnen haben. Der Versuchsstand ist so konstruiert, dass er sowohl mit einem vertikalen Laval-Rotor als auch mit einem Pendelrotor ausgerüstet werden kann.

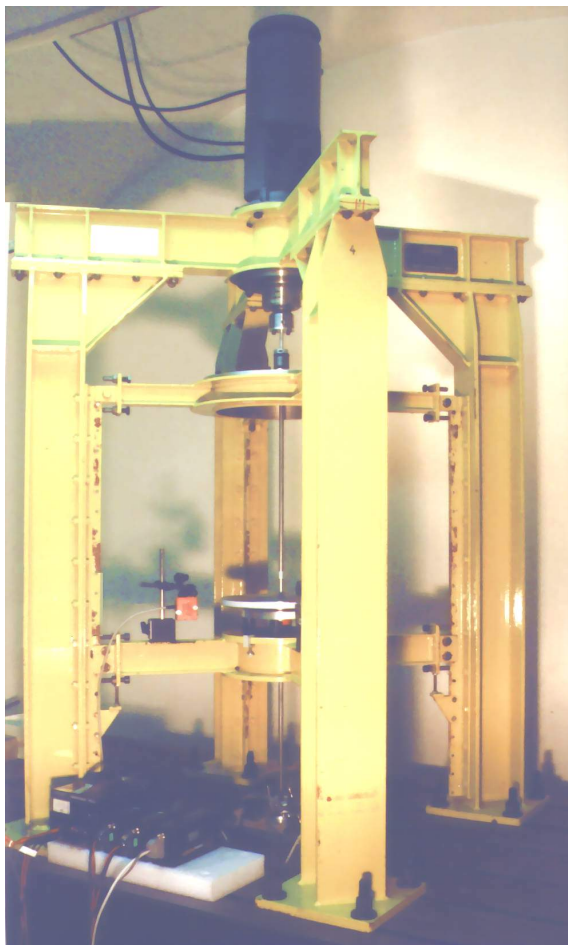


Bild 6.1: Versuchsstand mit Laval-Rotor. Von oben: Drehstrommotor, Metallbalgkuppelung, Lagerkreuz mit Pendelkugellager, Welle, Rotorscheibe, Fanglagerkreuz mit elastisch aufgehängtem Fanglager und Wegaufnehmern, untere Lagerstelle mit Drehzahl-aufnehmer.

Wir konnten Messungen durchführen, aus denen wir Parameter für das Simulationsmodell

bestimmt haben. Andere, davon unabhängige Messungen dienen der Überprüfung des Simulationsmodells und seiner Ergebnisse.

6.1 Der Versuchsstand

Der Versuchsstand ist in der Lage, vertikale Rotoren mit einer Länge von bis zu 1 250 mm aufzunehmen. Ein Gestell ist fest auf einer Aufspannplatte montiert. Die Aufspannplatte ist mit dem Fundament verblockt. Das Gestell enthält zwei Kreuze, die das obere Rotorlager und das Fanglager tragen. Ihre vertikale Position kann eingestellt werden (siehe Bild 6.2).

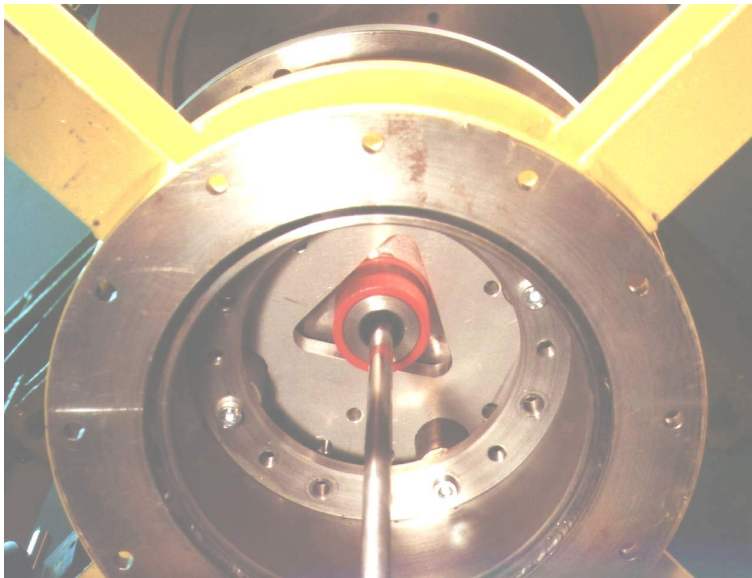


Bild 6.2: Das Fanglagerkreuz trägt über vier Gummifedern ein dreiseitiges Fanglager. Weiter erkennt man den Fanglagerzapfen des Laval-Rotors mit einer PVC-Hülse.

Die Rotoren werden von einem vierpoligen Drehstrommotor (SEW Eurodrive, 3 kW, 3600 U/min) angetrieben. Ein Frequenzumrichter (Movitrac 3100, SEW Eurodrive) steuert die Drehzahl des Motors von 30 bis 3600 U/min (bzw. $\Omega/2\pi = 0,5 \dots 60$ Hz). Der Frequenzumrichter erlaubt einen so genannten *Vier-Quadranten-Betrieb*, bei dem der Motor auch elektrisch gebremst werden kann. Es ist möglich, den Motor gemäß einstellbarer Drehzahlrampen an- oder auslaufen zu lassen. Bei einer Notabschaltung wird der Rotor mit Hilfe einer im Motor eingebauten Scheibenbremse mit ca. 40 Nm abgebremst.

6.2 Messtechnik

Die eingesetzte Messtechnik ermöglicht das Messen der Rotorposition, der Fanglagerposition und der Drehzahl.

6.2.1 Messung der Rotorposition

Zwei senkrecht zueinander stehende optische Wegaufnehmer (OptoNCDT, LD 1605-20, Micro-Epsilon) erfassen die Position der Rotorscheibe.

Die Wegaufnehmer arbeiten berührungslos. Nach dem Triangulationsprinzip wird der Abstand zu einer Messfläche bestimmt. Dazu wirft eine Laserdiode einen kleinen Lichtpunkt auf die diffus reflektierende Messfläche. Unter einem anderen Winkel wird der Lichtpunkt über eine Optik auf einem lichtempfindlichen elektronischen Chip (CCD) abgebildet. Die Position auf dem Chip ist ein Signal für den Abstand zur Messfläche.

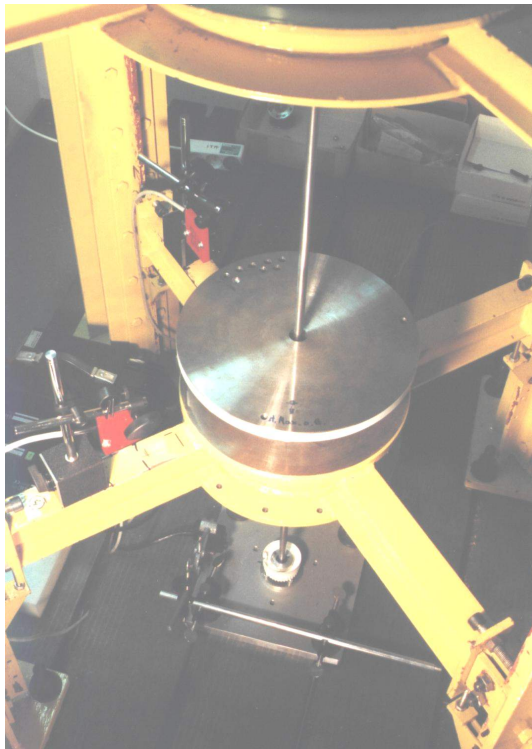


Bild 6.3: Messaufnehmer am Versuchsstand: Zwei optische Wegaufnehmer erfassen die Position der Rotorscheibe. Sie messen gegen den weißen äußeren Rand der Rotorscheibe. Die Drehzahl messen wir mit einem dritten optischen Wegaufnehmer, der die Drehung einer gezahnten Scheibe auf dem unteren Wellenende registriert.

Als Messfläche dient uns die Mantelfläche der Rotorscheibe, die mit einer weißen, matten Farbe überzogen wurde (siehe Bild 6.3).

Ein kleiner systematischer Messfehler entsteht durch die Rundung der Messfläche dann, wenn sich der Rotor senkrecht zur Messrichtung des Aufnehmers bewegt. Der Abstand zur Messfläche vergrößert sich, ohne dass sich der Wellenmittelpunkt tatsächlich in diese Richtung bewegen würde. Je kleinerer der Durchmesser einer zylindrischen Messfläche ist, desto größer wird dieser Messfehler. Wir wollen anmerken, dass es leicht möglich wäre, diesen Fehler bei der Signalverarbeitung zu eliminieren, wenn man wie hier die Position des Rotors mit zwei Aufnehmern ermittelt.

Messungen, bei denen der Rotor mit der Hand an der Fangfläche entlanggeführt wird, zeigen diesen Fehler, der besonders in den Fanglager-Ecken sichtbar wird (siehe Bild 6.4).

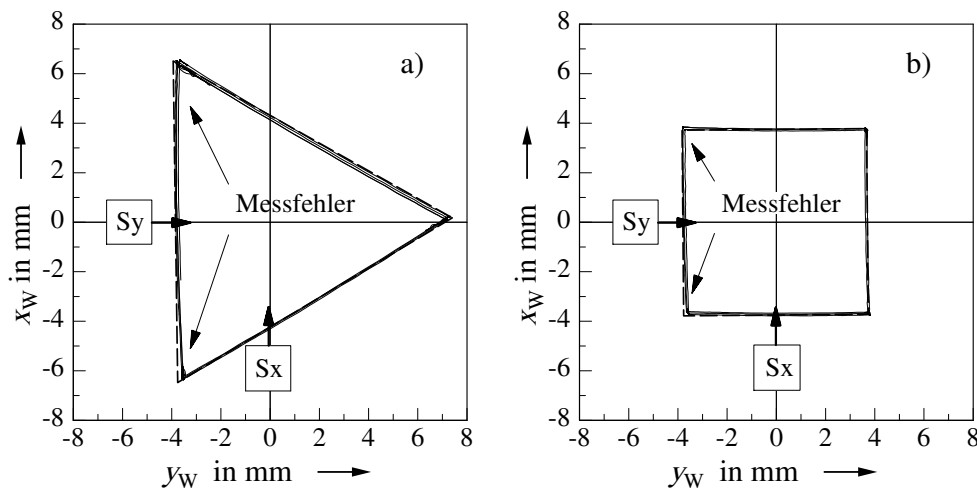


Bild 6.4: Abgetastete Freiraumgrenze des (a) dreiseitigen und (b) vierseitigen Fanglagers. Positionen und Messrichtungen der optischen Wegaufnehmer S_x und S_y . In den Ecken werden Abweichungen zur tatsächlichen Lage der Freiraumgrenze sichtbar.

Der Messfehler bleibt in unserem Fall stets kleiner als 0,13 mm. Alle übrigen Messfehler unserer Positionsbestimmung sind noch kleiner.

6.2.2 Messung der Fanglagerposition

Mit den selben optischen Wegaufnehmern wie zur Messung der Rotorposition wird die Position des Fanglagers in der Fanglagerebene erfasst. Als Messfläche dient uns die Außenseite der Fanglagerscheibe. Leider standen uns insgesamt nur drei optische Wegaufnehmer zur Verfügung. Rotorposition und Fanglagerposition konnten daher nicht gleichzeitig aufgezeichnet werden. Wegen der sehr guten Reproduzierbarkeit der Versuche konnten die Positionsmessungen für den Rotor und für das Fanglager an zwei Versuchsläufen nacheinander aufgenommen werden.

Die Fanglagerscheiben haben einen Außendurchmesser von 200 mm. Der oben beschriebene Messfehler durch gleichzeitige Auslenkung bis zu 4 mm senkrecht zur Messrichtung beträgt maximal 0,08 mm.

6.2.3 Messung der Drehzahl

Am Rotor ist eine Zahnscheibe mit 36 Zähnen angebracht. Ein optischer Wegaufnehmer (OptoNCDT, OD 1605-10, Micro-Epsilon) registriert die Zähne. Einer der Zähne ist größer als die übrigen. Aus dem aufgezeichneten Rechteck-Signal können wir bei der Signalverarbeitung die augenblickliche Drehzahl und den Drehwinkel des Rotors (Phasenlage)

ermitteln.

Bei Bewegungen ohne Fanglagerkontakt entspricht die tatsächliche Drehzahl sehr genau der am Frequenzumrichter eingestellten Soll-Drehzahl. Dies gilt im gesamten Drehzahlbereich des Antriebs und auch beim Durchfahren einer Drehzahlrampe. Der größte relative Fehler entstand bei kleinen Drehzahlen, blieb aber stets unter 4 %. Daher können wir in einigen Fällen auf eine Auswertung des Drehzahlsignals verzichten und die angezeigte Soll-Drehzahl vom Frequenzumrichter übernehmen.

Wenn durch den Fanglagerkontakt größere Bremsmomente entstehen und die tatsächliche Drehzahl von der Vorgabe abweicht können wir auf die Drehzahlmessung durch die Zahnscheibe nicht verzichten. Beim Laval-Rotor, der eine besonders dünne Welle hat, platzieren wir die Zahnscheibe am unteren unbelasteten Wellenende, um einen Fehler durch die Torsion der Welle zu vermeiden.

6.2.4 Signalfluss und Signalverarbeitung

Bei einem Versuch werden in der Regel drei Messsignale (x-Position, y-Position, Drehzahlsignal) aufgenommen und zu einem Rechner übertragen. Die Signale werden mit einer Frequenz von 1000 Hz gleichzeitig abgetastet und gespeichert. Bei der anschließenden Aufbereitung werden sie durch ein digitales Tiefpassfilter (Besselfilter sechster Ordnung, Eckfrequenz 100 Hz) gegeben, um sie von hochfrequentem Rauschen zu befreien. Ein nochmaliges Filtern mit umgedrehter Zeitachse vermindert den Phasenfehler.

Mit einem selbst entwickelten Programm wird aus dem Rechteck-Signal der Rotordrehung ein Frequenz- und ein Phasenwinkel-Signal berechnet.

6.3 Messungen von Kennlinien und Systemparametern

Die folgenden Messungen dienen der Ermittlung von Systemparametern für das Simulationsmodell.

Für die verschiedenen Hülsen der Fanglagerzapfen (siehe Bild 6.5) haben wir Normal- und Reibkraft-Kennlinien gemessen.

Ausschwingversuche dienten uns zur Ermittlung von Steifigkeiten und Dämpfungswerten.

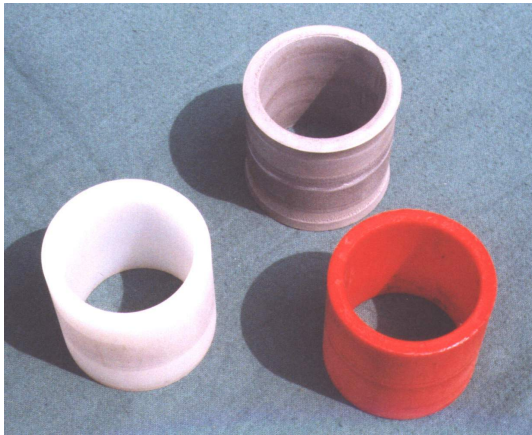


Bild 6.5: Verschiedene Hülsen für den Fanglagerzapfen. Von links: Polyamid, Gummi und Polyvinylchlorid (PVC). Außendurchmesser 50 mm.

6.3.1 Normalkraft–Kennlinie

Wir messen die statische Normalkraft–Kennlinie für den Kontakt der verschiedenen Hülsen mit dem Fanglager. Wir haben diese Messungen am Pendel–Rotor vorgenommen, bei dem es durch den Pendelwinkel zu einem schiefen Kontakt kommt. Mit diesen Messungen können wir das FE–Modell (Abschnitt 2.3) bestätigen und so weitere Kennlinien für einen nicht schiefen Kontakt berechnen.

Die Hülse wird auf dem Fanglagerzapfen montiert. Am unteren Ende des Pendelrotors wird eine Wellenverlängerung in den Zapfen eingeschraubt. An dieser Verlängerung können wir über einen reibungsarmen Gleitring radiale Kräfte auf den Pendelrotor ausüben. Mit einer Spannvorrichtung wird eine radiale Kraft erzeugt, die den Pendelrotor mit der Hülse gegen das Fanglager zieht. Mit einem Kraftaufnehmer wird diese Spannkraft gemessen. Bei nicht rotierendem Rotor erhöhen wir die radiale Kraft schrittweise bis zu einem Wert von 1000 N. Mit einem optischen Wegaufnehmer messen wir die Verformung der Hülse (Eindringung a) und erhalten so Punkte für Punkt einer Normalkraft–Kennlinie.

Die Parameter der identifizierten Kennlinien sind im Anhang C in den Tabellen C.3 und C.4 zu finden. Bild 2.13 zeigt das Ergebnis der Messung für die Gummihülse.

6.3.2 Reibzahl–Kennlinie

Zur Ermittlung der Reibzahl–Kennlinie wird der Versuchsaufbau zur Messung der Normalkraft–Kennlinien (s. oben) erweitert. Am Gleitring der Wellenverlängerung wird eine zusätzliche Halterung angebracht, die den Pendelrotor tangential zur Fangfläche festhält. Diese Halterung wirkt also senkrecht zur Spannvorrichtung, welche die Hülse gegen die Fangfläche zieht. Mit einem zweiten Kraftaufnehmer kann die Kraft in der Halterung gemessen werden.

Bei laufendem Rotor drücken wir nun mit der Spannvorrichtung die Hülse gegen die Fangflä-

che. Bei unterschiedlichen Drehzahlen ermitteln wir simultan Normal- und Tangentialkraft (Reibkraft) zwischen Hülse und Fangfläche.

Bild 6.6 zeigt eine gemessene Reibzahl–Kennlinie für eine Gummihülse¹

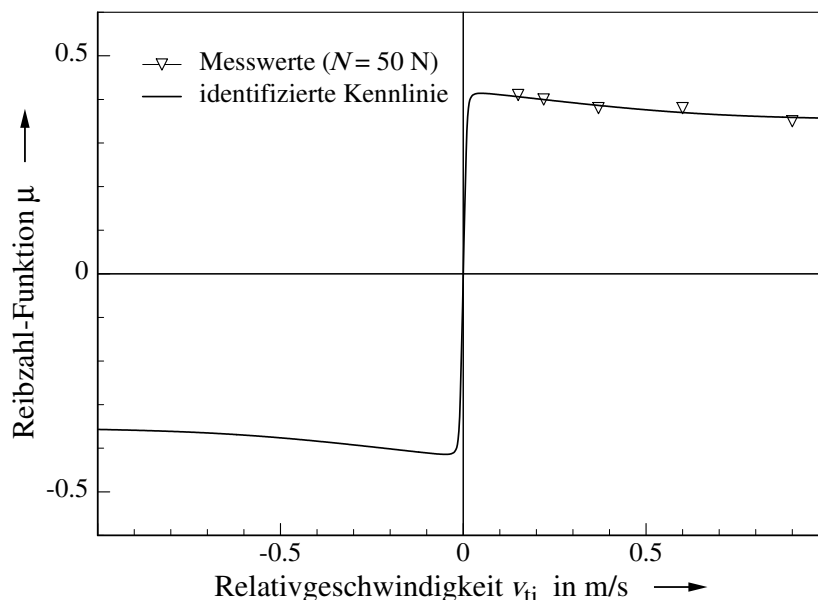


Bild 6.6: Gemessene Reibzahlen für eine Gummihülse bei einer Normalkraft von 50 N.

Die Parameter der identifizierten Reibzahl–Kennlinien sind im Anhang C in den Parameter–Tabellen C.3 und C.4 zu finden.

6.3.3 Ausschwingversuche

Mit Ausschwingversuchen am Laval–Rotor und am Pendelrotor wurden die jeweiligen Dämpfungskonstanten b_W ermittelt.

Durch Ausschwingversuche am Fanglager haben wir Steifigkeiten $k_{xF} = k_{yF}$ und k_{tF} sowie Dämpfungskonstanten $b_{xF} = b_{yF}$ und b_{tF} der elastischen Fanglager–Aufhängung bestimmt.

Die Werte sind in den Parameter–Tabellen C.1, C.2 und C.5 zu finden.

¹Die Gummihülse, die dieser Messung zugrunde liegt, hatte besonders hohe Reibzahlen. Für die Versuchsläufe haben wir schließlich eine andere Gummihülse mit geringeren Reibzahlen verwendet.

6.4 Messungen am Laval–Rotor

6.4.1 Periodische Bewegungen bei verschiedenen Fanglagern

Für die Messung stehen uns drei verschiedenen Fanglager zur Verfügung. Zwei polygonförmige Fanglager in Form eines gleichseitigen Dreiecks und eines Quadrats sowie ein rundes Fanglager (siehe Bild 6.7).

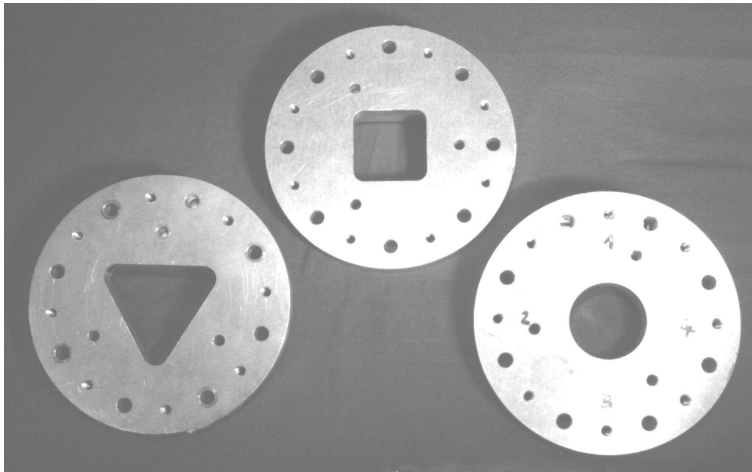


Bild 6.7: Fanglager–Scheiben aus Aluminium: dreiseitig, vierseitig und rund. Innenkreisdurchmesser 58 mm.

Zunächst messen wir die Bewegungen bei konstant gehaltener Drehzahl. Der Rotor wird mit einem Stoß ins Fanglager gebracht. Da der Rotor eine Rest–Unwucht ($e_S \approx 0,16$ mm), eine geometrische Exzentrizität ($e_L \approx 0,10$ mm) und weitere Imperfektionen aufweist, sind die beobachteten Bewegungen nie streng periodisch.

Polygonförmige Fanglager mit starrer Aufhängung

Wir messen die Bewegung des Laval–Rotors in einem **dreiseitigen** Fanglager mit starrer Aufhängung bei einer Drehzahl von $\Omega/2\pi = 2,50$ Hz (siehe Bild 6.8).

Wir beobachten eine quasi–periodische Rotorbewegung. Der Orbit ist durch Massenexzentrizität und geometrische Exzentrizität gestört. Wir finden eine gute Übereinstimmung zu den Simulationen der Bilder 4.3 und 4.18. Die maximale Geschwindigkeit beträgt hier etwa $\tilde{v}_W \approx 0,15$ m/sec und entspricht der bei der Simulation erreichten Geschwindigkeit (0,151 m/sec).

Bei gleicher Drehzahl führen wir auch eine Messung mit dem **vierseitigen** Fanglager durch (siehe Bild 6.8).

Die periodische Bewegung wird hier noch stärker durch Massenexzentrizität und geometrische Exzentrizität gestört. Die maximale Geschwindigkeit der gemessenen Bewegung liegt

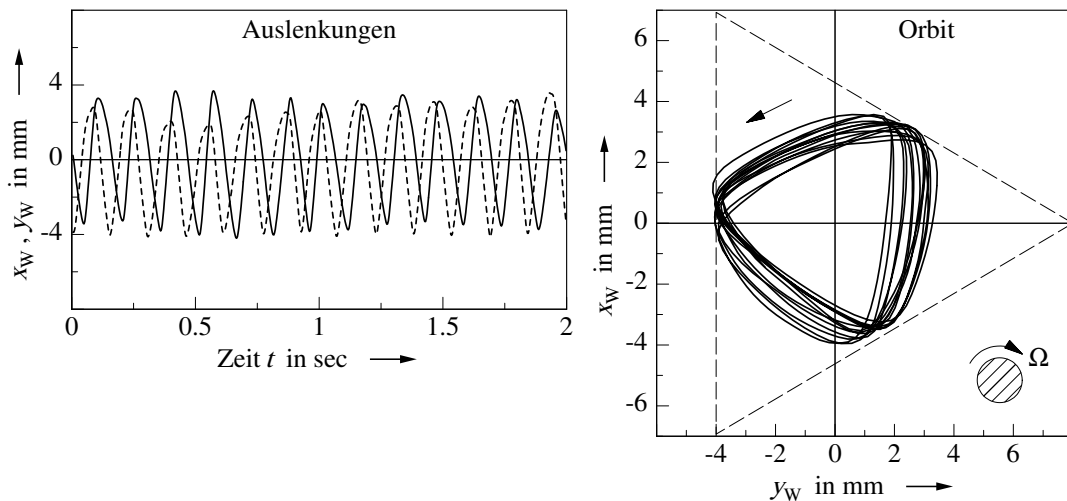


Bild 6.8: Messung: Quasi-periodische Gegenlauf-Bewegung des Rotors in **dreiseitigem** Fanglager. Zeitverläufe: Rotorauslenkungen $x_W(t)$ und (gestrichelt) $y_W(t)$, Orbit: $x_W(y_W)$. Vergleiche mit Simulation (Bild 4.3 und 4.18). (Laval-Rotor, Massenexzentrizität $e_S \approx 0,16$ mm, geometrische Exzentrizität $e_L \approx 0,10$ mm, $\Omega/2\pi = 2,50$ Hz, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; starr gel. FL; PVC-Hülse).

in dem dargestellten Intervall bei $\tilde{v}_W \approx 0,21$ m/sec. Sie ist damit etwas höher als es die Simulation vorhersagt (0,180 m/sec, vgl. Bild 4.4).

Die Messungen sind bei einer geringeren Drehzahl durchgeführt worden als die Simulationen (Bilder 4.3, 4.4; $\Omega/2\pi = 6,00$ Hz), mit denen wir sie vergleichen. Wir haben gezeigt, dass die Drehzahl nur einen geringen Einfluss auf die Bewegung im polygonförmigen Fanglager besitzt (vgl. Abschnitt 4.2.4). Die Messungen bestätigen das Ergebnis der Simulation, wonach die Geschwindigkeit der periodischen Bewegung mit der Anzahl der Fangflächen zunimmt (vgl. Abschnitt 4.2.3).

Rundes Fanglager mit starrer Aufhängung

Die nächste Messung zeigt den Einschwingvorgang und die anschließende gegenläufige Rotorbewegung in einem runden Fanglager (siehe Bild 6.10). Es kommt zum *backward whirl*. Wir wählen eine geringere Drehzahl $\Omega/2\pi = 2,00$ Hz als zuvor bei den polygonförmigen Fanglagern, um Schäden am Versuchsstand zu vermeiden.

Die gemessene Geschwindigkeit erreicht hier einen Wert von $\tilde{v}_W \approx 0,31$ m/sec, der trotz verminderter Drehzahl über den Werten bei polygonförmigen Fanglager liegt.

Beim Vergleich mit der Simulation (Bild 4.6) müssen wir beachten, dass die Drehzahl dort dreimal höher ist. Die Messung ergibt aber — genau wie die Simulation — eine Geschwindigkeit knapp unter dem Wert für reines Abrollen ($\Omega r = 0,314$ m/sec).

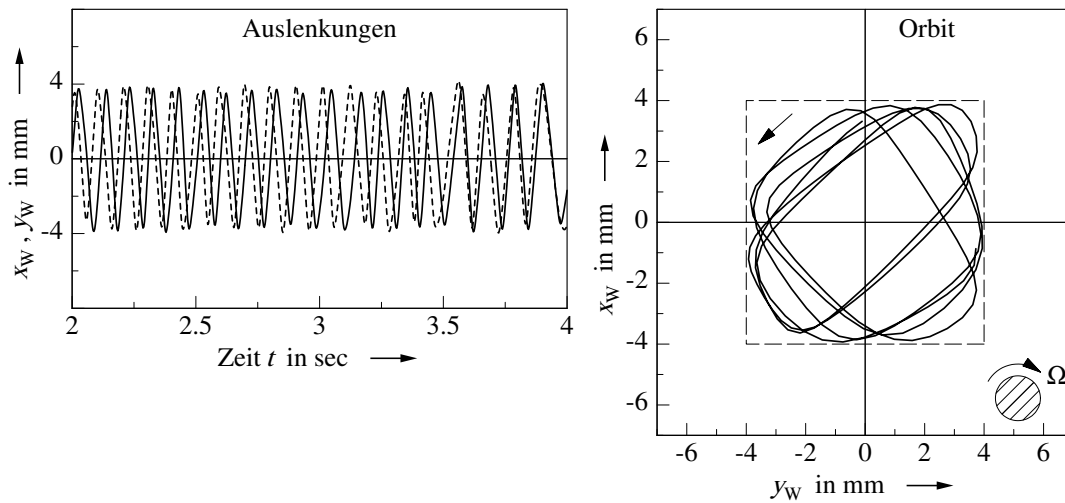


Bild 6.9: Messung: Quasi-periodische Rotorbewegung in **vierseitigem** Fanglager. Zeitverläufe: Rotorauslenkungen $x_W(t)$ und (gestrichelt) $y_W(t)$, Orbit: $x_W(y_W)$. Vergleiche mit Simulation (Bild 4.4). (Laval-Rotor, Massenexzentrizität $e_S \approx 0,16$ mm, geometrische Exzentrizität $e_L \approx 0,10$ mm, $\Omega/2\pi = 2,50$ Hz, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; starr gel. FL; PVC-Hülse).

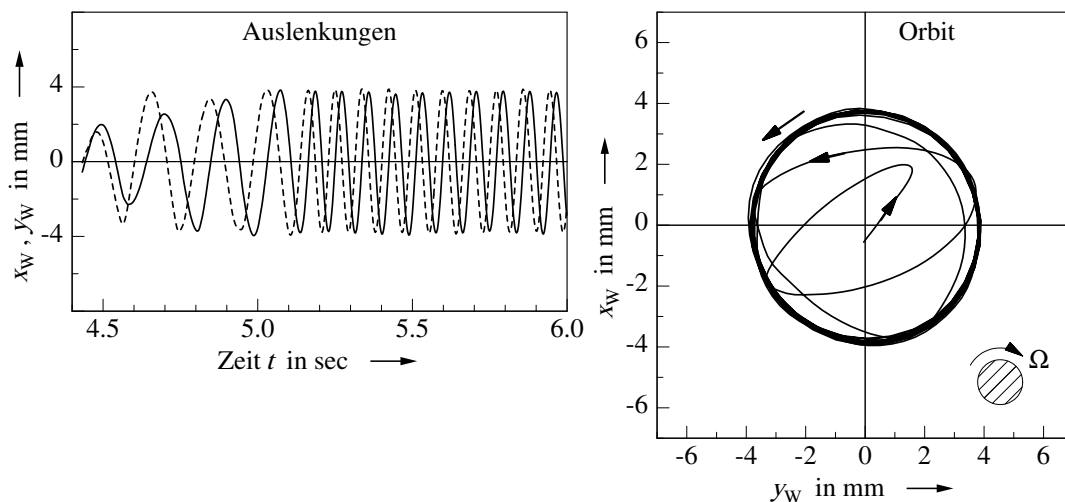


Bild 6.10: Messung: Einschwingvorgang und selbsterregte gegenläufige Rotorbewegung (*backward whirl*) in **rundem** Fanglager. Zeitverläufe: Rotorauslenkungen $x_W(t)$ und (gestrichelt) $y_W(t)$, Orbit: $x_W(y_W)$. Vergleiche mit Simulation (Bild 4.6). (Laval-Rotor, Massenexzentrizität $e_S \approx 0,16$ mm, geometrische Exzentrizität $e_L \approx 0,10$ mm, $\Omega/2\pi = 2,00$ Hz, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; starr gel. FL; PVC-Hülse).

Polygonförmige Fanglager mit elastischer Aufhängung

Wir realisieren eine elastische Aufhängung der Fanglager mit vier Gummifedern (Rundlager Simrit A 3040; siehe Bild 6.11).



Bild 6.11: Elastische Fanglager-Aufhängung mit vier Gummifedern. Zwei Schrauben auf der Rotorscheibe (links) dienen als Unwucht.

Bild 6.12 zeigt die gemessene gegenläufige Bewegung des Laval-Rotor und die dazugehörige Bewegung des **dreiseitigen** Fanglagers bei einer Drehzahl von $\Omega/2\pi = 4,50$ Hz.

Die Messung bestätigt die Ergebnisse der Simulation (vgl. Bild 4.25). Wieder beobachten wir einen charakteristisch sternförmigen Fanglager-Orbit. Die maximale, radiale Auslenkung des Rotors (5,5 mm) und die des Fanglagers (1,5 mm) fallen etwas größer aus, als bei der Simulation. Auch die gemessene maximale Geschwindigkeit $\tilde{v}_W \approx 0,20$ m/sec übersteigt den errechneten Wert (0,174 m/sec) etwas. Damit sollten auch die Kräfte geringfügig über den errechneten Werten liegen.

Zum Vergleich werden die Bewegungen bei einem **runden** Fanglager gemessen (siehe Bild 6.13).

Nach wenigen Sekunden entwickelt sich eine quasi-stationäre Bewegung, ein *backward whirl*. Die Messung zeigt eine sehr gut Übereinstimmung mit der Simulation (Bild 4.30). Die gemessenen Auslenkungen ($\rho_W \approx 5,5$ mm, $\rho_F \approx 1,6$ mm) und die Geschwindigkeiten ($\tilde{v}_W \approx 0,30$ m/sec, $\tilde{v}_F \approx 0,10$ m/sec) liegen nur geringfügig unter den prognostizierten Werten.

Die Messungen zeigen in Übereinstimmung mit der Simulation, dass die Bewegung des Laval-Rotors im Fanglager mit elastischer Aufhängung im Hinblick auf die maximale Geschwindigkeit im dreiseitigen Fanglager günstiger ausfällt als im runden.

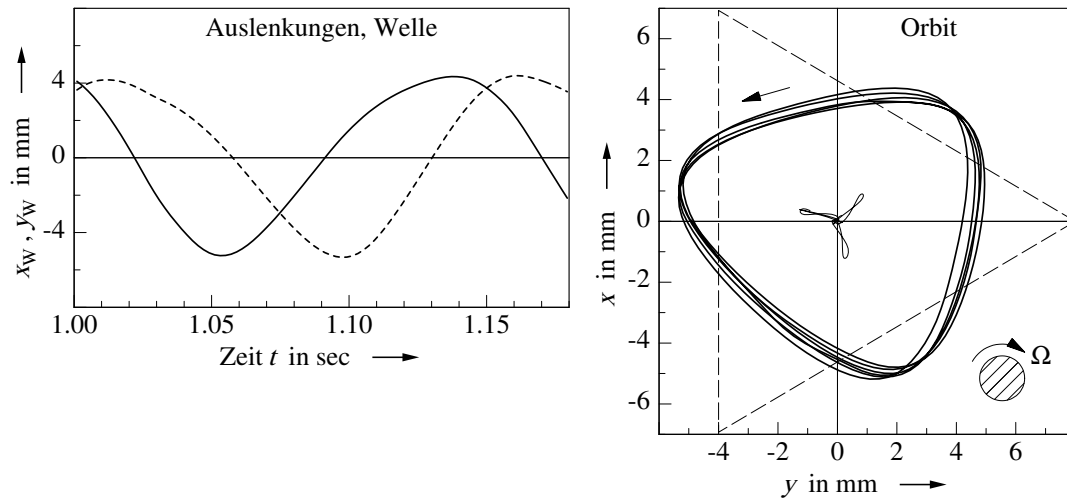


Bild 6.12: Messung: Periodische Gegenlauf-Bewegung in **dreiseitigem**, elastisch aufgehängtem Fanglager. Zeitverläufe: Rotorauslenkungen $x_W(t)$ und (gestrichelt) $y_W(t)$, Orbit: $x_W(y_W)$. Vergleiche mit Simulation (Bild 4.25). (Laval-Rotor, Massenexzentrizität $e_S \approx 0,16$ mm, geometrische Exzentrizität $e_L \approx 0,10$ mm, $\Omega/2\pi = 4,50$ Hz, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; PVC-Hülse).

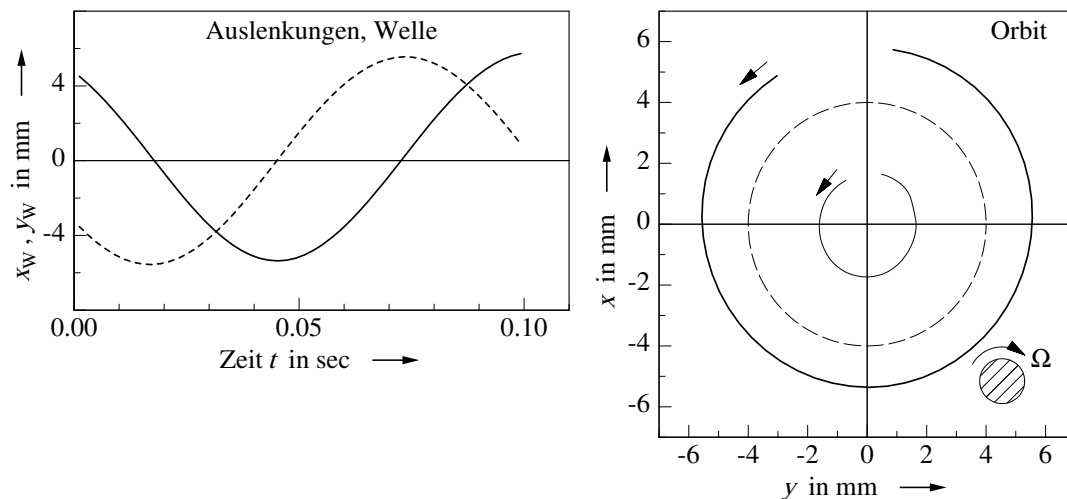


Bild 6.13: Messung: Periodische Gegenlauf-Bewegung in **rundem**, elastisch aufgehängtem Fanglager. Zeitverläufe: Rotorauslenkungen $x_W(t)$ und (gestrichelt) $y_W(t)$, Orbit: $x_W(y_W)$. Vergleiche mit Simulation (Bild 4.30). (Laval-Rotor, Massenexzentrizität $e_S \approx 0,16$ mm, geometrische Exzentrizität $e_L \approx 0,10$ mm, $\Omega/2\pi = 1,50$ Hz, $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz; PVC-Hülse).

6.4.2 Resonanzdurchfahrt bei verschiedenen Fanglagern

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Bewegungen des Laval-Rotors beim Resonanzdurchgang. Mit dem Frequenzumrichter können wir für die Drehzahl einen rampenförmigen Verlauf vorgeben.

$$\Omega_{soll}(t) = \dot{\Omega} t .$$

Für die Messungen wählen wir eine Winkelbeschleunigung von $\dot{\Omega}/2\pi = \pm 0,20$ Hz/sec. Innerhalb von 50 sec wird der Rotor aus dem Stand auf eine Drehzahl von $\Omega_{max}/2\pi = 10,00$ Hz beschleunigt. Dann halten wir diese Drehzahl für etwa 10 s konstant und laufen schließlich die Drehzahlrampe wieder zurück bis zum Stillstand des Rotors.

Ohne Zusatzmassen besitzt der Laval-Rotor eine Massenexzentrizität von $e_S = 0,16$ mm. Durch zusätzliche Gewichte ($m_{U2} = 20,6$ g; $m_{U4} = 69,8$ g), die am äußeren Rand der Rotorscheibe angeschraubt werden (links im Bild 6.11), lässt sich die Massenexzentrizität auf $e_S = 0,37$ mm bzw. 1,02 mm erhöhen. Damit kommt es beim Resonanzdurchgang sicher zu einem Kontakt mit dem Fanglager. Andererseits kann die in der Rotorscheibe gegebene Massenexzentrizität durch das Anbringen von Zusatzmassen reduziert werden.

Es ist zu beachten, dass die Auslenkungen von Rotor und Fanglager nicht gleichzeitig gemessen werden können. Wir müssen zwei Versuchsläufe nacheinander durchführen. Die Resonanzkurven können daher kleine Diskrepanzen zueinander aufweisen.

Dreiseitiges Fanglager mit starre Aufhängung

Wir messen die Resonanzkurve (siehe Bild 6.14) für den unwuchtbehafteten Laval-Rotor im dreiseitigen Fanglager.

Im Vergleich zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung zur Simulation (Bild 4.32). Kurz bevor die kritische Drehzahl erreicht wird, läuft der Rotor ins Fanglager. Beim Hochlauf verbleibt er länger im Fanglager und der Kontakt ist intensiver als beim Auslauf.

Die gemessene Drehzahl folgt ohne sichtbare Abweichungen dem vorgegebenen Verlauf.

Rundes Fanglager mit starre Aufhängung

Es folgt ein Resonanzdurchlauf im runden Fanglager bei sonst gleichen Bedingungen wie zuvor.

Beim Hochlauf kommt es nach dem ersten Kontakt zu einer Phase mit Stößen und dann zu einer gefährlichen Situation. Es stellt sich ein *backward whirl* ein, der den Versuchsstand zu immer heftigeren Schwingungen anregt. Eine Notabschaltung wird erforderlich. Im Drehzahlverlauf ist an dieser Stelle ein starker Abfall zu sehen. Die Motorleistung reicht nicht

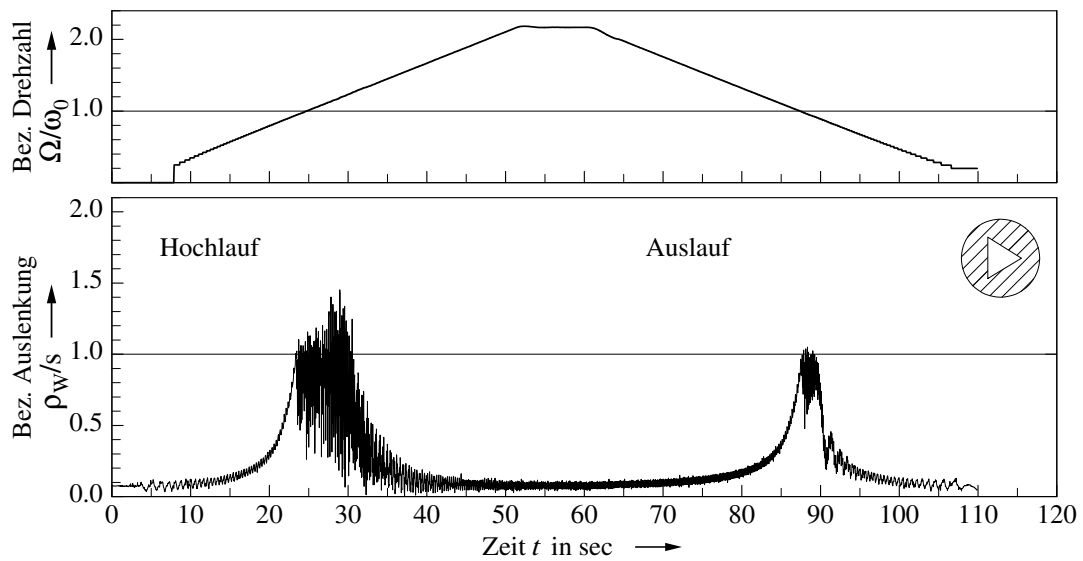


Bild 6.14: Messung: Transienter Resonanzdurchlauf bei starr aufgehängtem **dreiseitigem** Fanglager. Bezogene Rotorauslenkung ρ_W/s , ($s = 4$ mm) und Verlauf der bezogenen Drehzahl Ω/ω_0 . Drehzahlrampe: $\dot{\Omega}/2\pi = \pm 0,20$ Hz/sec. Vergleich mit Bild 4.32. (Laval-Rotor, Massenexzentrizität $e_S = 0,37$ mm, geom. Exzentrizität $e_L = 0,10$ mm, Eigenfrequenz $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz).

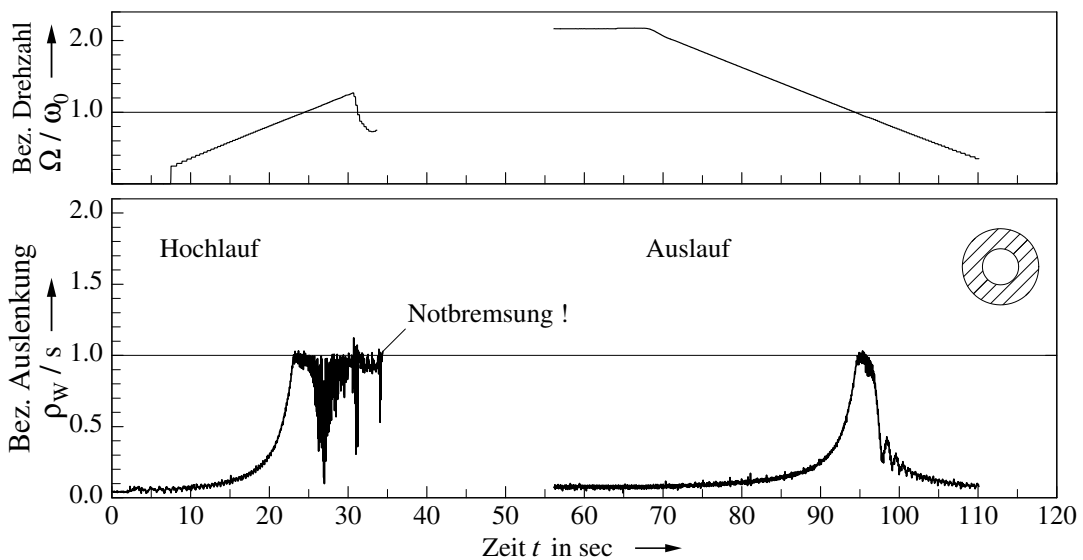


Bild 6.15: Messung: Transienter Resonanzdurchlauf bei starr aufgehängtem **rundem** Fanglager. Beim Hochlauf kommt es zum gefährlichen *backward whirl*. Eine Notbremsung wird erforderlich. Bezogene Rotorauslenkung ρ_W/s , ($s = 4$ mm) und Verlauf der bezogenen Drehzahl Ω/ω_0 . Drehzahlrampe: $\dot{\Omega}/2\pi = \pm 0,20$ Hz/sec. Vergleich mit Bild 4.34. (Laval-Rotor, Massenexzentrizität $e_S = 0,37$ mm, geom. Exzentrizität $e_L = 0,10$ mm, Eigenfrequenz $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz).

aus, um den Drehzahl-Soll-Verlauf zu halten. Große Bremsmomente beim Kontakt sind hierfür verantwortlich. Ein Teil der erhöhten Antriebsenergie wird in die Anfachung der Rotorbewegung umgeleitet.

Wie sich die Bewegung weiter entwickelt hätte und welche Kontaktkräfte dabei entstanden wären, kann man durch den Vergleich mit der Simulation abschätzen (vgl. Bild 4.34).

Durch besondere Maßnahmen ließ sich der Rotor dennoch auf eine überkritische Drehzahl bringen, so dass wir den Resonanzdurchgang beim Auslauf des Rotors messen konnten. Hierbei führte der Fanglagerkontakt nicht zum *backward whirl*. Der Rotor löste sich wieder vom Fanglager, wie die rechte Hälfte von Bild 6.15 zeigt. Auch in diesem Punkt wird die Simulation durch die Messung bestätigt.

Dreiseitiges Fanglager mit elastischer Aufhängung

Wir messen den Resonanzdurchgang des Laval-Rotors in einem dreiseitigen Fanglager mit *elastischer* Aufhängung. Die Rotorscheibe wird mit einer zusätzlichen Unwuchtmasse $m_{U4} = 69,8 \text{ g}$ ausgestattet, die zu einer Massenexzentrizität von $e_S = 1,02 \text{ mm}$ führt.

Bild 6.16 zeigt uns die radialen Auslenkungen von Rotor und Fanglager. Die Kontaktphasen beim Hoch- und Auslauf sind deutlich länger als bei starr gelagertem Fanglager. Das Fanglager erfährt beim Hochlauf stoßweise radiale Auslenkungen von bis zu 2 mm.

Rundes Fanglager mit elastischer Aufhängung

Zum Vergleich wird der Resonanzdurchgang des Laval-Rotors bei sonst gleichen Bedingungen in einem runden Fanglager mit elastischer Aufhängung gemessen (Bild 6.17).

Beim Hochlauf stellt sich nach dem ersten Kontakt und einer Phase mit Stößen ein *backward whirl* mit permanentem Kontakt ein. Dabei wächst die Fanglager-Auslenkung auf einen Betrag von etwa 2 mm. Im Gegensatz zum starren Fanglager kann sich der Rotor aber wieder vom Fanglager lösen. Auch wenn es beim Vergleich mit der Resonanzkurve (Bild 6.16) des dreiseitigen, elastischen Fanglagers nicht so erscheint, der Rotor-Stator-Kontakt im runden Fanglager beeinträchtigt den Hochlauf des Laval-Rotors viel stärker als im dreiseitigen Fanglager. Wir beobachten stärkere Schwingungen des Versuchsstands und einen stärkeren Einbruch im Drehzahlverlauf.

Die Kontaktphase beim Auslauf ist dagegen unkritisch und kürzer als beim dreiseitigen Fanglager.

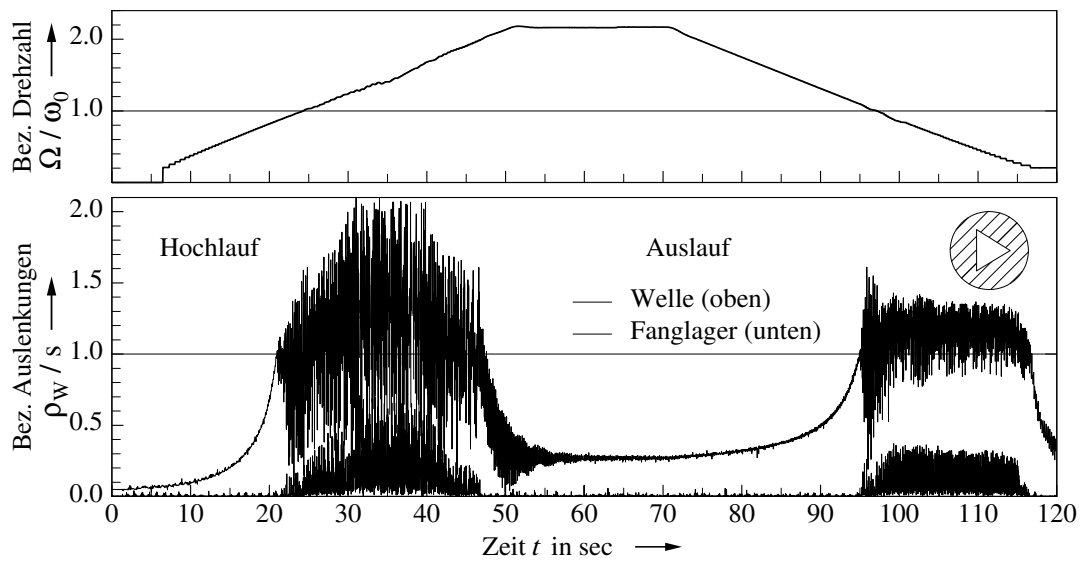


Bild 6.16: Messung: Transienter Resonanzdurchlauf bei **dreiseitigem, elastisch gelagertem** Fanglager. Bezogene Auslenkungen ρ_W/s und ρ_F/s , ($s = 4$ mm) und Verlauf der bezogenen Drehzahl Ω/ω_0 . Drehzahlrampe: $\dot{\Omega}/2\pi = \pm 0,20$ Hz/sec. (Laval-Rotor, Massenexzentrizität $e_S = 1,02$ mm, geom. Exzentrizität $e_L = 0,10$ mm, Eigenfrequenz $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz).

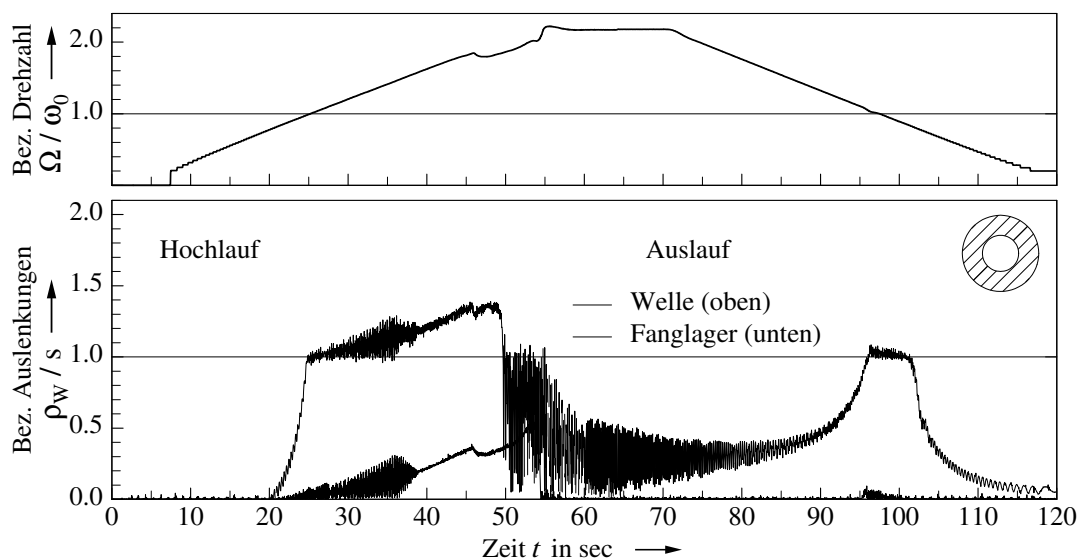


Bild 6.17: Messung: Transienter Resonanzdurchlauf bei **rundem, elastisch gelagertem** Fanglager. Bezogene Auslenkungen ρ_W/s und ρ_F/s , ($s = 4$ mm) und Verlauf der bezogenen Drehzahl Ω/ω_0 . Drehzahlrampe: $\dot{\Omega}/2\pi = \pm 0,20$ Hz/sec. (Laval-Rotor, Massenexzentrizität $e_S = 1,02$ mm, geom. Exzentrizität $e_L = 0,10$ mm, Eigenfrequenz $\omega_0/2\pi = 4,70$ Hz).

6.5 Messungen am Pendelrotor

Bild 6.18 zeigt den Versuchsstand mit eingebautem Pendelrotor. Die Pendelbewegung wird durch ein Kardangelenk ermöglicht und vom Fanglager am unteren Ende des Rotors begrenzt. Das obere Kreuz stellt nur einen Schutz dar. Die Wegaufnehmer messen die Position des Rotors am unteren Wulst der Rotortrommel. Auch hier wurde die Messfläche matt-weiß lackiert, da die optischen Wegaufnehmer eine diffus reflektierende Oberfläche benötigen.



Bild 6.18: Versuchsstand mit Pendelrotor. Von oben: Kardangelenk, Welle, Kreuz mit Schutzring, Rotortrommel, Fanglagerkreuz mit Fanglager und Wegaufnehmern.

Chaotische Bewegungen in polygonförmigen Fanglagern

Die Phänomene Periodenverdopplung und deterministisches Chaos lassen sich auch im Experiment mit dem Pendelrotor beobachten.

Bei einer Drehzahl von $\Omega/2\pi = 5,00$ Hz und der Verwendung der Gummi-Hülse (Tabelle C.4) finden wir im dreiseitigen Fanglager eine zweiseifige, quasi-periodische Gegenlauf-Bewegung (siehe Bild 6.19).

Die Messung kann mit der Simulation (Bild 5.6) verglichen werden.

Bei höheren Drehzahlen messen wir beim Pendelrotor unregelmäßige, chaotische Bewegungen im dreiseitigen Fanglager.

Die Bahn im Bild 6.20 ist bei einer Drehzahl von $\Omega/2\pi = 5,00$ Hz und der Verwendung der PVC-Hülse (Tabelle C.3) entstanden. Sie erscheint noch verwickelter als die Bahn der Simulation zu Bild 5.7, die bei einer Drehzahl von $\Omega/2\pi = 6,76$ Hz unter Verwendung der Gummi-Hülse (Tabelle C.4) entstanden ist.

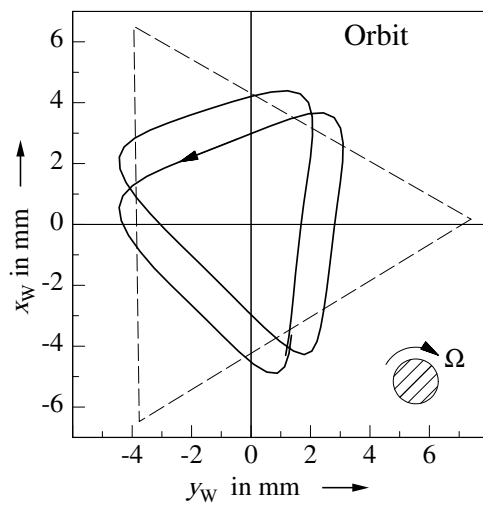


Bild 6.19: Messung: Zweisechleifige Rotorbewegung. Vergleiche mit Simulation (Bild 5.6). (Pendelrotor, geom. Exzentrizität $e_L \approx 0,2$ mm, $\Omega/2\pi = 5,00$ Hz, $\omega_0/2\pi = 0,76$ Hz; starr gel. FL; Gummi-Hülse).

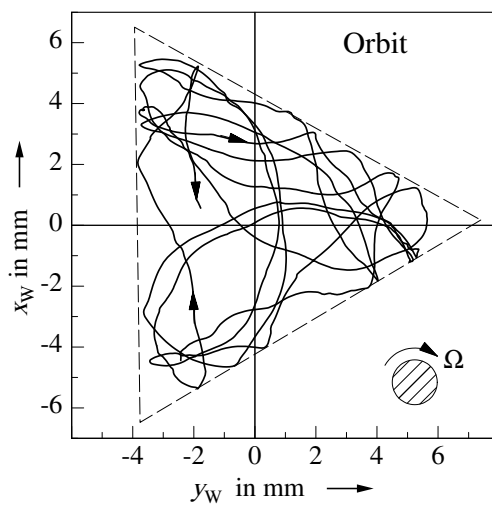


Bild 6.20: Messung: Chaotische Bewegung. Vergleiche mit Simulation (Bild 5.7). (Pendelrotor, geom. Exzentrizität $e_L \approx 0,2$ mm, $\Omega/2\pi = 5,00$ Hz, $\omega_0/2\pi = 0,76$ Hz; starr gel. FL; Gummi-Hülse).

Kapitel 7

Zusammenfassung

Fanglager begrenzen die radialen Auslenkungen von Rotoren. Ein Kontakt zwischen Rotor und Fanglager tritt nur in Notfallsituationen oder bei der Resonanzdurchfahrt überkritisch betriebener Rotoren auf.

Herkömmliche Fanglager sind rund. Hier kann es in Folge des Fanglagerkontakts zum unerwünschten *backward whirl* kommen. Bei dieser durch Reibung angefachten Bewegung läuft der Wellenmittelpunkt gegen die Rotordrehung im Fanglager um. Dabei können hohe Umlaufgeschwindigkeiten mit gefährlich großen Unwuchtkräften entstehen.

Die vorliegende Arbeit folgt einem Hinweis aus der Industrie, wonach die Verwendung von *dreiseitigen* anstelle von runden Fanglagern die Entstehung gefährlicher Betriebszustände in einigen Einzelfällen verhindern konnte.

Das Ziel der Arbeit ist es, die Vorteile von allgemein *polygonförmigen* Fanglagern gegenüber runden Fanglagern zu klären. Dazu wird die Bewegung eines Rotors beim Kontakt mit einem polygonförmigen Fanglager erstmals theoretisch und experimentell untersucht. Es werden einfache Fanglager betrachtet, die nicht mit einem Wälzlager ausgestattet sind.

Wir entwickeln Simulationsmodelle für die Bewegung eines Laval-Rotors und eines Pendelrotors beim Kontakt mit einem polygonförmigen oder einem runden Fanglager. Der Rotor-Stator-Kontakt wird mit Hilfe von nichtlinearen Kennlinien reibungs- und verlustbehaftet beschrieben. Die Kennlinien für die Kontaktkräfte werden experimentell und mit einem Finite-Elemente-Modell gewonnen. Bei permanentem Kontakt, wie er in runden Fanglagern entsteht, berücksichtigen wir Rollreibungseffekte, indem wir die Kontaktzone und die Kontaktkräfte in ihrer räumlichen Ausbreitung betrachten.

Wir lösen die stark nichtlinearen Bewegungsgleichungen durch numerische Integration. Bei konstanter Drehzahl berechnen wir periodische, quasi-periodische oder unregelmäßige (chaotische) Bewegungen. Weiter werden transiente Resonanzdurchgänge beim An-

oder Auslauf der Rotoren simuliert. Wir ermittelten den Einfluss der Fanglagerform, der Kontaktparameter und sonstiger Parameter auf die simulierten Bewegungen.

In einem Versuchsstand messen wir die Bewegungen eines Laval-Rotors und eines Pendelrotors beim Kontakt mit einem dreiseitigen, einem vierseitigen und einem runden Fanglager. Die Messungen bestätigen die Ergebnisse der Simulationsprogramme.

Die vorliegende Arbeit zeigt theoretisch und experimentell, dass polygonförmige Fanglager Vorteile gegenüber den herkömmlichen, runden Fanglagern bieten können. In polygonförmigen Fanglagern finden wir in einem weiten Parameterbereich selbsterregte, periodische Bewegungen, bei denen der Rotor auf die Fangflächen stößt. Die dabei auftretenden Kontaktkräfte sind abhängig von den Kontakteigenschaften und von der Relativgeschwindigkeit der Kontaktpartner vor dem Stoß. Die Kontaktkräfte beim *backward whirl* im runden Fanglager wachsen in der Regel mit der Drehzahl des Rotors stark an.

Die selbsterregten Rotorschwingungen in polygonförmigen Fanglagern sind in vielen Fällen durch geringere Geschwindigkeiten und geringere Kontaktkräfte gekennzeichnet als in einem vergleichbaren runden Fanglager. Beim transienten Resonanzdurchlauf kann sich der Rotor in der Regel leichter aus dem Fanglager lösen. Dies gilt insbesondere für das dreiseitige, gleichseitige Fanglager mit einem nachgiebigen, dämpfenden und reibungsarmen Kontakt.

Anhang A

Bewegungsgleichung des Pendelrotors mit exzentrischem Kardangelenk

An dieser Stelle soll die Bewegungsgleichung des Pendelrotors, der an einem nicht fluchten Kardangelenk aufgehängt ist, aus dem Drallsatz hergeleitet werden. Wir wollen zeigen, welche vereinfachenden Annahmen zu der in Kapitel 2.6 angegebenen Bewegungsgleichung (2.56) führen.

A.1 Drehmatrizen und Basiswechsel

Elementare Drehmatrizen

Zunächst stellen wir die drei elementaren Drehmatrizen für Drehungen eines ungebundenen Vektors um die Achsen eines kartesischen Basissystems (x, y, z) (kurz Basis) bereit. Zur Definition dieser Drehmatrizen nehmen wir an, dass die Koeffizienten eines beliebigen Vektors \underline{v} in der Basis (x, y, z) gegeben sind. Wir erhalten dann den mit einem bestimmten Winkel um eine der Achsen i ($i = x, y, z$) gedrehten Vektor durch die Vorschrift

$$\underline{v}_{gedreht} = \underline{\underline{R}}_i \underline{v} .$$

Die Koeffizienten des gedrehten Vektors beziehen sich ebenfalls auf die Basis (x, y, z) .

Für Drehungen um die x -, y - und z -Achse mit den Winkeln α , β bzw. γ in mathematisch

positiver Orientierung gelten die Drehmatrizen

$$\begin{aligned}\underline{\underline{R}}_x &:= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \\ \underline{\underline{R}}_y &:= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}, \\ \underline{\underline{R}}_z &:= \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Basiswechsel

Eine Basis k (x_k, y_k, z_k) geht durch eine Drehung um eine Achse i in die Basis ℓ (x_ℓ, y_ℓ, z_ℓ) über. $\underline{\underline{R}}_i$ sei die Drehmatrix die k in ℓ abbildet. Gilt es nun einen Vektor ${}^k\underline{v}$, der in Koeffizienten der Basis k gegeben ist, in Koeffizienten der gedrehten Basis ℓ darzustellen, so muss für diese Transformation die Transponierte der Drehmatrix verwendet werden.

$${}^\ell\underline{v} = \underline{\underline{R}}_{\ell k} {}^k\underline{v} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{R}}_{\ell k} := \underline{\underline{R}}_i^T \quad (\text{A.1})$$

Der linke obere Index am Vektor kennzeichnet die Basis, bezüglich derer die Koeffizienten der vorliegen.

A.2 Aufbau und Anordnung von Pendelrotor und Kardangelenken

Wir betrachten den Pendelrotor, wie er in Abschnitt 2.6 eingeführt wurde. Beim Aufbau unterscheiden wir folgende, als starr angenommene, Körper (vgl. Bild A.1).

- Die unbeschleunigte Umgebung (Index 0).
- Die Antriebswelle zusammen mit der oberen Hälfte des Kardangelenks (Index 1): Sie rotiert um eine Achse in Richtung der Schwerkraft.
- Das Kardankreuz (Index 2): Die beiden Achsen des Kardankreuzes stehen senkrecht zueinander und liegen in einer Ebene.
- Der Rotor zusammen mit der unteren Hälfte des Kardangelenks (Index 3).

Der Rotor (Länge ℓ , Masse m_R) wird als schwerer, symmetrischer Kreisel (vgl. [43]) angenommen. Er wird über ein exzentrisches Kardangelenken so angetrieben, dass ein rotorfester

Punkt A , der sogenannte Führungspunkt, der auch auf der Figurenachse liegt, auf einer Kreisbahn mit der Exzentrizität e_{LS} umläuft. Der Abstand zwischen A und S' beträgt $l_{AS'}$. Die Exzentrizität liegt in Richtung der Kardanachse, die mit der oberen Hälfte der Kupplung verbunden ist. Sie betrifft nur die obere Hälfte der Kardankupplung und/oder diese Achse (vgl. Bilder 2.21 und A.1). Die letzte Annahme führt dazu, dass der Führungspunkt A seine Höhe nicht ändert. Im statischen Gleichgewicht liegen die Punkte S und S' senkrecht unter A sowie der Punkt L senkrecht unter A' . Zur Definition dieser Punkte siehe Abschnitt 2.6 und die Bilder 2.21 und A.1. Der Abstand zwischen den rotorfesten Punkten L und S beträgt e_{LS} .

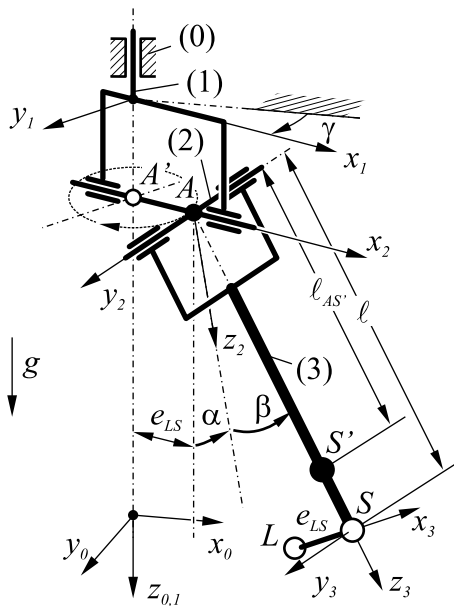


Bild A.1: Prinzipskizze des Pendelrotors mit exzentrischem Kardangelenk. Umgebung (0), Antriebswelle (1), Kardankreuz (2), Rotor (3), Bewegter Führungspunkt A und Massenmittelpunkt S' des Rotors.

Der Pendelrotor hat im rotorfesten System die folgende Matrix der Massenmomente (Trägheitstensor) bezüglich des Führungspunkts A :

$$\underline{\underline{J}}_A = \begin{bmatrix} J_{xA} & 0 & 0 \\ 0 & J_{xA} & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}$$

Basissysteme und Basiswechsel für den Pendelrotor

Um die Lage des Rotors zu beschreiben, führen wir folgende Basissysteme ein, die an den verschiedenen Körpern befestigt sind und durch technisch anschauliche Drehungen auseinander hervorgehen. Die Positionen der Ursprungspunkte der Basissysteme sind hier unerheblich. Es kommt nur auf die Verdrehungen an (siehe Bild A.1).

- Basis 0 (x_0, y_0, z_0) ist unser bekanntes Referenzsystem. Es ist raumfest. Die z_0 -Achse weist vertikal nach unten.
- Basis 1 (x_1, y_1, z_1) ist fest mit der Antriebswelle und der oberen Hälfte des Kardangelenks verbunden. Sie ist gegenüber Basis 0 um die z_0 -Achse (= Antriebsachse) mit dem Winkel γ gedreht. Die x_1 -Achse weist in Richtung der Exzentrizität (e_{LS}).
- Basis 2 (x_2, y_2, z_2) ist fest mit dem Kardankreuz verbunden und gegenüber Basis 1 um die x_2 -Achse (= erste Kardanachse) mit dem Winkel α gedreht.
- Basis 3 (x_3, y_3, z_3) ist fest mit dem Rotor verbunden und gegenüber Basis 2 um die y_2 -Achse (= zweite Kardanachse) mit dem Winkel β gedreht.

Die Reihenfolge dieser Drehungen ist nicht identisch mit der üblichen Reihenfolge der bekannten Kardanwinkel.

Für die Basiswechsel in der Richtung vom raumfesten zum rotorfesten System gelten nun die Transformationsmatrizen

$$\underline{\underline{R}}_{10} = \underline{\underline{R}}_z^T, \quad \underline{\underline{R}}_{21} = \underline{\underline{R}}_x^T, \quad \underline{\underline{R}}_{32} = \underline{\underline{R}}_y^T.$$

Für die Basiswechsel in umgekehrter Reihenfolge, vom rotorfesten zum raumfesten System, gelten die Transformationsmatrizen

$$\underline{\underline{R}}_{23} = \underline{\underline{R}}_y, \quad \underline{\underline{R}}_{12} = \underline{\underline{R}}_x, \quad \underline{\underline{R}}_{01} = \underline{\underline{R}}_z.$$

A.3 Winkelgeschwindigkeit des Rotors

Wir bilden die Winkelgeschwindigkeit ${}^3\underline{\underline{\omega}}_R$ des Rotors in der rotorfesten Basis 3.

Die absolute Winkelgeschwindigkeit der Antriebswelle (1) gegenüber dem Referenzsystem (0) in Koeffizienten der Basis 1 lautet

$${}^1\underline{\underline{\omega}}_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}.$$

Die relative Winkelgeschwindigkeit vom Kardankreuz (2) gegenüber der Antriebswelle (1) in Koeffizienten der Basis 2 lautet

$${}^2\underline{\underline{\omega}}_{21} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die relative Winkelgeschwindigkeit vom Rotor (3) gegenüber dem Kardankreuz (2) in Koeffizienten der Basis 3 lautet

$${}^3\underline{\omega}_{32} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Für die absolute Winkelgeschwindigkeit vom Rotor (3) gegenüber dem Referenzsystem (0) in Koeffizienten der rotorfesten Basis 3 ergibt sich

$${}^3\underline{\omega}_R = {}^3\underline{\omega}_{32} + \underline{\underline{R}}_{32} ({}^2\underline{\omega}_{21} + \underline{\underline{R}}_{21} {}^1\underline{\omega}_{10}) = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta - \dot{\gamma} \sin \beta \cos \alpha \\ \dot{\beta} + \dot{\gamma} \sin \alpha \\ \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \cos \beta \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

A.4 Drallsatz bezüglich des bewegten Führungspunkts

Der Drallsatz in der Form

$$\frac{d\underline{L}_P}{dt} = \underline{M}_P$$

gilt nur für Bezugspunkte P , die entweder der Massenmittelpunkt oder (raum- und körperfeste) Fixpunkte sind (vgl. MAGNUS und MÜLLER (1990), [45]; Abschnitt 6.3.4). Hier bezeichnet $\underline{L}_P = \underline{J}_P \underline{\omega}$ den Drall und \underline{M}_P ein resultierendes äußeres Moment auf den Körper bezüglich des Punkts P .

In unserem Fall bietet sich der Führungspunkt A als Bezugspunkt an. Da er bewegt ist, müssen wir den Drallsatz in der allgemeineren Form für bewegte Bezugspunkte (MAGNUS und MÜLLER (1990), [45]; Gleichung 6.22) verwenden.

$$\frac{d\underline{L}_A}{dt} + m_R (\underline{r}_{AS'} \times \underline{a}_A) = \underline{M}_A \quad (\text{A.3})$$

Um einen konstanten Trägheitstensor verwenden zu können, transformieren wir die Gleichung (A.3) auf das rotorfeste System (vgl. MAGNUS und MÜLLER (1990), [45]; Gleichung 6.72) und erhalten

$$\underline{\underline{J}}_A \frac{d' {}^3\underline{\omega}_R}{dt} + {}^3\underline{\omega}_R \times \underline{\underline{J}}_A {}^3\underline{\omega}_R + m_R ({}^3\underline{r}_{AS'} \times {}^3\underline{a}_A) = {}^3\underline{M}_A \quad (\text{A.4})$$

Hierin bezeichnet $\frac{d'(\cdot)}{dt}$ eine vom bewegten System aus beobachtete Änderung, also die partielle Ableitung der auf die bewegte Basis bezogenen Koeffizienten nach der Zeit. Es sei angemerkt, dass im Sonderfall des Winkelgeschwindigkeitsvektors diese Änderung und die absolute Änderung einander gleich sind: $\frac{d' \underline{\omega}}{dt} = \frac{d \underline{\omega}}{dt}$ (vgl. MAGNUS (1990), [45]; Gleichung

5.46). Weiter enthält die Gleichung den Ortsvektor vom Bezugspunkt A zum Massenmittelpunkt S' ,

$${}^3r_{AS'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell_{AS'} \end{bmatrix},$$

und die Absolutbeschleunigung des Bezugspunkts A in Koeffizienten der rotorfesten Basis \mathfrak{B} ,

$${}^3a_A = \underline{\underline{R}}_{32} \underline{\underline{R}}_{21} {}^1a_A = \underline{\underline{R}}_{32} \underline{\underline{R}}_{21} \begin{bmatrix} -\dot{\gamma}^2 e_{LS} \\ \ddot{\gamma} e_{LS} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\gamma}^2 e_{LS} \cos \beta + \ddot{\gamma} e_{LS} \sin \alpha \sin \beta \\ \ddot{\gamma} e_{LS} \cos \alpha \\ -\dot{\gamma}^2 e_{LS} \sin \beta - \ddot{\gamma} e_{LS} \sin \alpha \cos \beta \end{bmatrix}.$$

Für den ersten Teil der Drallgleichung erhalten wir

$$\underline{\underline{J}}_A \frac{d' {}^3\omega_R}{dt} = \begin{bmatrix} J_{xA} (\cos \beta \ddot{\alpha} - \sin \beta \dot{\alpha} \dot{\beta} - \cos \alpha \cos \beta \dot{\beta} \dot{\gamma} + \sin \alpha \sin \beta \dot{\alpha} \dot{\gamma} - \cos \alpha \sin \beta \ddot{\gamma}) \\ J_{xA} (\ddot{\beta} + \cos \alpha \dot{\alpha} \dot{\gamma} + \sin \alpha \ddot{\gamma}) \\ J_z (\sin \beta \ddot{\alpha} + \cos \beta \dot{\beta} \dot{\alpha} - \cos \alpha \sin \beta \dot{\beta} \dot{\gamma} - \sin \alpha \cos \beta \dot{\alpha} \dot{\gamma} + \cos \alpha \cos \beta \ddot{\gamma}) \end{bmatrix}.$$

Der zweite Teil der Drallgleichung liefert

$${}^3\omega_R \times \underline{\underline{J}}_A {}^3\omega_R = \begin{bmatrix} (J_z - J_{xA}) (\sin \beta \dot{\alpha} + \cos \alpha \cos \beta \dot{\gamma}) (\dot{\beta} + \sin \alpha \dot{\gamma}) \\ -(J_z - J_{xA}) (\sin \beta \dot{\alpha} + \cos \alpha \cos \beta \dot{\gamma}) (\cos \beta \dot{\alpha} - \cos \alpha \sin \beta \dot{\gamma}) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Und der dritte Teil der Drallgleichung, der die Beschleunigung des Bezugspunkts berücksichtigt, lautet

$$m_R ({}^3r_{AS'} \times {}^3a_A) = \begin{bmatrix} -m_R \ell_{AS'} \cos \alpha \ddot{\gamma} e_{LS} \\ -m_R \ell_{AS'} e_{LS} (\cos \beta \dot{\gamma}^2 + \sin \beta \sin \alpha \ddot{\gamma}) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Das resultierende äußere Moment auf der rechten Seite der Drallgleichung (A.4) enthält ein Moment ${}^3\underline{\underline{M}}_G$ aus der Gewichtskraft, ein Moment ${}^3\underline{\underline{M}}_K$ aus der Drehsteifigkeit des Kardangelenks (Antriebsmoment) und ein Moment ${}^3\underline{\underline{M}}_B$ aus innerer Dämpfung oder Reibung in den Achslagern des Kardangelenks.

$${}^3\underline{\underline{M}}_A = {}^3\underline{\underline{M}}_G + {}^3\underline{\underline{M}}_K + {}^3\underline{\underline{M}}_B.$$

Für die Gewichtskraft in der rotorfesten Basis gilt

$${}^3\underline{G} = \underline{\underline{R}}_{32} \underline{\underline{R}}_{21} \underline{\underline{R}}_{10} {}^0\underline{G} = \underline{\underline{R}}_{32} \underline{\underline{R}}_{21} \underline{\underline{R}}_{10} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_R g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha \sin \beta m_R g \\ \sin \alpha m_R g \\ \cos \alpha \cos \beta m_R g \end{bmatrix}.$$

Für das Moment ${}^3\underline{M}_G$ aus der Gewichtskraft folgt damit

$${}^3\underline{M}_G = {}^3\underline{r}_{AS'} \times {}^3\underline{G} = \begin{bmatrix} -\ell_{AS'} \sin \alpha m_R g \\ -\ell_{AS'} \sin \beta \cos \alpha m_R g \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Das Antriebsmoment, das über das Kardangelenk auf den Rotor wirkt, muss senkrecht auf den beiden Kardanachsen stehen. Es wirkt also um die z_2 -Achse. Damit gilt

$${}^3\underline{M}_K = \underline{\underline{R}}_{32} {}^2\underline{M}_K = \underline{\underline{R}}_{32} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \beta M_K \\ 0 \\ \cos \beta M_K \end{bmatrix}.$$

Der Betrag des Antriebsmoments M_K ist zunächst unbekannt, kann aber später aus den Bewegungsgleichungen eliminiert werden.

Das Reibungs- bzw. Dämpfungsmoment ${}^3\underline{M}_B$ setzt sich aus den Momenten um die beiden Kardanachsen x_2 und $y_2 = y_3$ zusammen. Zunächst nehmen wir eine allgemeine Abhängigkeit von den Winkelgeschwindigkeiten der Kardanachsen $(\dot{\alpha}, \dot{\beta})$ an.

$${}^3\underline{M}_B = {}^3\underline{M}_{By} + \underline{\underline{R}}_{32} {}^2\underline{M}_{Bx} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{By}(\dot{\beta}) \\ 0 \end{bmatrix} + \underline{\underline{R}}_{32} \begin{bmatrix} M_{Bx}(\dot{\alpha}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta M_{Bx}(\dot{\alpha}) \\ M_{By}(\dot{\beta}) \\ \sin \beta M_{Bx}(\dot{\alpha}) \end{bmatrix}$$

Reibung könnte in Form einer nichtlinearen Kennlinie in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeiten modelliert werden (vgl. Bild 2.5). Für das gesamte äußere Moment auf den Rotor ergibt sich nun

$${}^3\underline{M}_A = \begin{bmatrix} -\sin \beta M_K - \ell_{AS'} \sin \alpha m_R g + \cos \beta M_{Bx}(\dot{\alpha}) \\ -\ell_{AS'} \sin \beta \cos \alpha m_R g + M_{By}(\dot{\beta}) \\ \cos \beta M_K + \sin \beta M_{Bx}(\dot{\alpha}) \end{bmatrix}.$$

Der Drallsatz lautet somit zeilenweise:

Zeile 1:

$$J_{xA} (\cos \beta \ddot{\alpha} - \sin \beta \dot{\alpha} \dot{\beta} - \cos \alpha \cos \beta \dot{\beta} \dot{\gamma} + \sin \alpha \sin \beta \dot{\alpha} \dot{\gamma} - \cos \alpha \sin \beta \ddot{\gamma}) \\ + (J_z - J_{xA}) (\sin \beta \dot{\alpha} + \cos \alpha \cos \beta \dot{\gamma}) (\dot{\beta} + \sin \alpha \dot{\gamma}) - m_R \ell_{AS'} \cos \alpha \ddot{\gamma} e_{LS}$$

$$= -\sin \beta M_K - \ell_{AS'} \sin \alpha m_R g + \cos \beta M_{Bx}(\dot{\alpha})$$

Zeile 2:

$$\begin{aligned} & J_{xA} (\ddot{\beta} + \cos \alpha \dot{\alpha} \dot{\gamma} + \sin \alpha \ddot{\gamma}) \\ & - (J_z - J_{xA}) (\sin \beta \dot{\alpha} + \cos \alpha \cos \beta \dot{\gamma}) (\cos \beta \dot{\alpha} - \cos \alpha \sin \beta \dot{\gamma}) \\ & - m_R \ell_{AS'} e_{LS} (\cos \beta \dot{\gamma}^2 + \sin \beta \sin \alpha \ddot{\gamma}) \\ & = -\ell_{AS'} \sin \beta \cos \alpha m_R g + M_{BY}(\dot{\beta}) \end{aligned}$$

Zeile 3:

$$\begin{aligned} & J_z (\sin \beta \ddot{\alpha} + \cos \beta \dot{\beta} \dot{\alpha} - \cos \alpha \sin \beta \dot{\beta} \dot{\gamma} - \sin \alpha \cos \beta \dot{\alpha} \dot{\gamma} + \cos \alpha \cos \beta \ddot{\gamma}) \\ & = \cos \beta M_K + \sin \beta M_{Bx}(\dot{\alpha}) \end{aligned}$$

Wir lösen Zeile 3 nach dem Betrag des Kardanmoments M_K auf und setzen es in Zeile 1 ein. Zeile 1 und 2 bilden dann ein System von nichtlinearen Differentialgleichungen (DGLn) für die Winkel α und β .

DGL 1:

$$\begin{aligned} & J_{xA} (-\sin \beta \dot{\beta} \dot{\alpha} + \cos \beta \ddot{\alpha} - \cos \beta \dot{\beta} \cos \alpha \dot{\gamma} + \sin \beta \sin \alpha \dot{\alpha} \dot{\gamma} - \sin \beta \cos \alpha \ddot{\gamma}) \\ & + (J_z - J_{xA}) (\dot{\beta} + \sin \alpha \dot{\gamma}) (\sin \beta \dot{\alpha} + \cos \beta \cos \alpha \dot{\gamma}) - m_R \ell_{AS'} \cos \alpha \ddot{\gamma} e_{LS} \\ & + [J_z \cos \beta \dot{\beta} \dot{\alpha} + J_z \sin \beta \ddot{\alpha} - J_z \sin \beta \dot{\beta} \cos \alpha \dot{\gamma} - J_z \cos \beta \sin \alpha \dot{\alpha} \dot{\gamma} + \\ & J_z \cos \beta \cos \alpha \ddot{\gamma} - \sin \beta M_{Bx}(\dot{\alpha})] \sin \beta / \cos \beta \\ & + \ell_{AS'} \sin \alpha m_R g - \cos \beta M_{Bx}(\dot{\alpha}) = 0 \end{aligned}$$

DGL 2:

$$\begin{aligned} & J_{xA} (\ddot{\beta} + \cos \alpha \dot{\alpha} \dot{\gamma} + \sin \alpha \ddot{\gamma}) \\ & - (J_z - J_{xA}) (\sin \beta \dot{\alpha} + \cos \alpha \cos \beta \dot{\gamma}) (\cos \beta \dot{\alpha} - \cos \alpha \sin \beta \dot{\gamma}) \\ & - m_R \ell_{AS'} e_{LS} (\cos \beta \dot{\gamma}^2 + \sin \beta \sin \alpha \ddot{\gamma}) - \ell_{AS'} \sin \beta \cos \alpha m_R g + M_{BY}(\dot{\beta}) = 0 \end{aligned}$$

A.5 Linearisieren der Bewegungsgleichungen

Wir nehmen an, die Exzentrizität des Kardangelenks und die radialen Ausschläge des Pendelrotors seien klein gegenüber seiner Länge. In unserem Fall begrenzt das Fanglager die Winkel α und β auf Werte kleiner als 1° . Weiter nehmen wir an, dass die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\alpha}$ und $\dot{\beta}$ der Pendelbewegung klein gegenüber der Antriebswinkelgeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ seien. Diese Annahme ist unter dem Begriff des *schnelldrehenden Rotors* (vgl. [43]) bekannt.

Wir linearisieren das System von Bewegungsgleichungen (DGL 1 und 2) bezüglich der Winkel α und β sowie der Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\alpha}$ und $\dot{\beta}$ um den Punkt $(\alpha_0 = 0, \beta_0 = 0, \dot{\alpha}_0 = 0, \dot{\beta}_0 = 0)$ mit Hilfe einer Taylorreihenentwicklung. Die Taylorreihenentwicklung wird

nach den linearen Gliedern abgebrochen wird und führt uns auf

$$J_{xA} \ddot{\alpha} - M_{Bx}(\dot{\alpha}) + \dot{\gamma} (J_z - 2J_{xA}) \dot{\beta} + [\dot{\gamma}^2 (J_z - J_{xA}) + m_R g \ell_{AS'}] \alpha + \ddot{\gamma} (J_z - J_{xA}) \beta = m_R \ddot{\gamma} e_{LS} \ell_{AS'} \quad (\text{A.5})$$

$$J_{xA} \ddot{\beta} - M_{By}(\dot{\beta}) - \dot{\gamma} (J_z - 2J_{xA}) \dot{\alpha} + [\dot{\gamma}^2 (J_z - J_{xA}) + m_R g \ell_{AS'}] \beta + \ddot{\gamma} J_{xA} \alpha = m_R \dot{\gamma}^2 e_{LS} \ell_{AS'} \quad (\text{A.6})$$

A.6 Transformieren der Bewegungsgleichungen

Die linearisierten Bewegungsgleichungen können nun auf die Auslenkung x_S und y_S des rotorfesten Punkts S transformiert werden.

Es gilt (lineare Näherung wie oben) (vgl. Bild A.1)

$$\begin{aligned} x_S &= (e_{LS} + \ell \beta) \cos \gamma + \ell \alpha \sin \gamma, \\ y_S &= (e_{LS} + \ell \beta) \sin \gamma - \ell \alpha \cos \gamma \end{aligned}$$

und daraus für die Winkel und deren Ableitungen

$$\begin{aligned} \alpha &= [x_S \sin \gamma - y_S \cos \gamma] / \ell, \\ \beta &= [x_S \cos \gamma + y_S \sin \gamma - e_{LS}] / \ell, \\ \dot{\alpha} &= [x_S \cos \gamma \dot{\gamma} + \dot{x}_S \sin \gamma + y_S \sin \gamma \dot{\gamma} - \dot{y}_S \cos \gamma] / \ell, \\ \dot{\beta} &= [-x_S \sin \gamma \dot{\gamma} + \dot{x}_S \cos \gamma + y_S \cos \gamma \dot{\gamma} + \dot{y}_S \sin \gamma] / \ell, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= [-x_S \sin \gamma \dot{\gamma}^2 + x_S \cos \gamma \ddot{\gamma} + 2\dot{x}_S \cos \gamma \dot{\gamma} + \ddot{x}_S \sin \gamma \\ &\quad + 2\dot{y}_S \sin \gamma \dot{\gamma} + y_S \cos \gamma \dot{\gamma}^2 + y_S \sin \gamma \ddot{\gamma} - \ddot{y}_S \cos \gamma] / \ell, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} &= [-x_S \cos \gamma \dot{\gamma}^2 - x_S \sin \gamma \ddot{\gamma} - 2\dot{x}_S \sin \gamma \dot{\gamma} + \ddot{x}_S \cos \gamma \\ &\quad + 2\dot{y}_S \cos \gamma \dot{\gamma} - y_S \sin \gamma \dot{\gamma}^2 + y_S \cos \gamma \ddot{\gamma} + \ddot{y}_S \sin \gamma] / \ell. \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Beziehungen in die Bewegungsgleichungen (A.5 und A.6) und Erweitern mit ℓ führt auf

$$\begin{aligned} J_{xA} (\sin \gamma \ddot{x}_S - \cos \gamma \ddot{y}_S) + \dot{\gamma} J_z (\cos \gamma \dot{x}_S + \sin \gamma \dot{y}_S) \\ + J_z \ddot{\gamma} (\cos \gamma x_S + \sin \gamma y_S) + \ell_{AS'} m_R g (\sin \gamma x_S - \cos \gamma y_S) - \ell M_{Bx}(\dot{\alpha}) \\ = -J_{xA} \ddot{\gamma} e_{LS} + m_R \ell \ell_{AS'} \ddot{\gamma} e_{LS} + J_z \ddot{\gamma} e_{LS}, \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& J_{xA} (\sin \gamma \ddot{y}_S + \cos \gamma \ddot{x}_S) + \dot{\gamma} J_z (\cos \gamma \dot{y}_S - \sin \gamma \dot{x}_S) \\
& \quad + \ell_{AS'} m_R g (\sin \gamma y_S + \cos \gamma x_S) - \ell M_{By}(\dot{\beta}) \\
& \quad = m_R \ell \ell_{AS'} \dot{\gamma}^2 e_{LS} - \dot{\gamma}^2 J_{xA} e_{LS} + \ell_{AS'} m_R g e_{LS} + \dot{\gamma}^2 J_z e_{LS} . \quad (\text{A.8})
\end{aligned}$$

Diese Bewegungsgleichungen beschreiben (bis auf den Faktor $1/\ell_{AS'}^2$) die auf die Fanglagerebene (in Höhe der Punkte S und L) reduzierten Kräftegleichgewichte am Rotor in tangentialer (A.7) und radialer (A.8) Richtung.

Die folgenden Umformungen führen auf Bewegungsgleichungen, die den Gleichgewichten in x - und y -Richtung entsprechen:

(A.7)* $\sin\gamma$ + (A.8)* $\cos\gamma$ führt auf ein Gleichgewicht in x -Richtung:

$$\begin{aligned}
& J_{xA} \ddot{x}_S + \dot{\gamma} J_z \dot{y}_S + \ell_{AS'} m_R g x_S \\
& \quad + \sin \gamma J_z \ddot{\gamma} \cos \gamma x_S + J_z \ddot{\gamma} \sin^2 \gamma y_S \\
& \quad - \ell M_{Bx}(\dot{\alpha}) \sin \gamma - \ell M_{By}(\dot{\beta}) \cos \gamma \\
& \quad = [(J_z - J_{xA}) \ddot{\gamma} e_{LS} + \ell m_R \ell_{AS'} \ddot{\gamma} e_{LS}] \sin \gamma \\
& \quad + [\dot{\gamma}^2 (J_z - J_{xA}) e_{LS} + \ell_{AS'} m_R g e_{LS} + \ell m_R \ell_{AS'} \dot{\gamma}^2 e_{LS}] \cos \gamma \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

(A.7)* $(-\cos\gamma)$ + (A.8)* $\sin\gamma$ führt auf ein Gleichgewicht in y -Richtung:

$$\begin{aligned}
& J_{xA} \ddot{y}_S - \dot{\gamma} J_z \dot{x}_S + \ell_{AS'} m_R g y_S \\
& \quad - \cos \gamma J_z \ddot{\gamma} \sin \gamma y_S - J_z \ddot{\gamma} \cos^2 \gamma x_S \\
& \quad - \ell M_{By}(\dot{\beta}) \sin \gamma + \ell M_{Bx}(\dot{\alpha}) \cos \gamma \\
& \quad = -[(J_z - J_{xA}) \ddot{\gamma} e_{LS} + \ell m_R \ell_{AS'} \ddot{\gamma} e_{LS}] \cos \gamma \\
& \quad + [\dot{\gamma}^2 (J_z - J_{xA}) e_{LS} + \ell_{AS'} m_R g e_{LS} + \ell m_R \ell_{AS'} \dot{\gamma}^2 e_{LS}] \sin \gamma \quad (\text{A.10})
\end{aligned}$$

A.7 Vereinfachen und Anpassen der Bewegungsgleichungen

Dämpfung

Eine innere (*mitdrehende*) Dämpfung oder Reibung, die in den Kardanachsen wirkt, kann zur Anfachung selbsterregter Schwingungen führen. Dieser Effekt, der am Versuchsrotor zunächst auftrat, konnte nahezu ausgeschaltet werden, indem wir das Kardangelenk durch Entfernen von Wellendichtungen und Fettfüllungen an den Achslagern erheblich leichtgängiger gemacht haben.

Wir vernachlässigen die innere Dämpfung ($M_{Bx} = 0$, $M_{By} = 0$) und führen gleichzeitig eine äußere Dämpfung ein. Im Unterschied zum Laval-Rotor greifen diese Dämpfungskräfte

nicht im Punkt L sondern im Punkt S an. Die Bewegungsgleichungen (A.9) und (A.10) werden auf der linken Seite um die Ausdrücke $b_W \dot{x}_S$ bzw. $b_W \dot{y}_S$ erweitert.

Konstante Drehzahl

Wird der Rotor mit konstanter Drehzahl angetrieben, dann vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen. Es gilt $\ddot{\gamma} \equiv 0$, $\dot{\gamma} \equiv \Omega$ und $\gamma(t) = \gamma_0 + \Omega t$. In den Bewegungsgleichungen (A.9) und (A.10) fallen jeweils die zweite und vierte Zeile weg.

Bewegungsgleichungen für den Fanglagerzapfen

In Abschnitt 2.6 wird angenommen, dass sich am unteren Ende des Pendelrotors ein Fanglagerzapfen befindet, dessen Mittelpunkt mit W bezeichnet wird. Der Zapfen liegt im Allgemeinen exzentrisch zur Figurenachse des Rotors, seine Masse sei aber so klein gegenüber der des Rotors, dass der Rotor dennoch als symmetrisch gelte. Wie beim Laval-Rotor sollen nun die Bewegungsgleichungen für den rotorfesten Punkt W gebildet werden, um den Kontakt zum Fanglager leichter beschreiben zu können.

Es gelten die Gleichungen (2.46) und die entsprechenden Ableitungen

$$\begin{aligned} x_S &= x_W + e_S \cos \varphi_S , \\ y_S &= y_W + e_S \sin \varphi_S , \\ \dot{x}_S &= \dot{x}_W - e_S \sin \varphi_S \dot{\varphi}_S , \\ \dot{y}_S &= \dot{y}_W + e_S \cos \varphi_S \dot{\varphi}_S , \\ \ddot{x}_S &= \ddot{x}_W - e_S \cos \varphi_S \dot{\varphi}_S^2 - e_S \sin \varphi_S \ddot{\varphi}_S , \\ \ddot{y}_S &= \ddot{y}_W - e_S \sin \varphi_S \dot{\varphi}_S^2 + e_S \cos \varphi_S \ddot{\varphi}_S . \end{aligned}$$

Zusätzlich zu den oben genannten Vereinfachungen und Anpassungen führen wir noch die in Abschnitt 2.6 definierten Abkürzungen 2.53, 2.54 und 2.55 ein,

$$\begin{aligned} m_W &= \frac{J_{xA}}{\ell^2} , \\ g_{xy} &= \frac{J_z}{\ell^2} , \\ k_W &= \frac{m_R g \ell_{AS'}}{\ell^2} , \end{aligned}$$

nutzen die Beziehungen

$$\begin{aligned} e_S \sin \varphi_S - e_{LS} \sin \gamma &= e_L \sin \varphi_L , \\ e_S \cos \varphi_S - e_{LS} \cos \gamma &= e_L \cos \varphi_L , \end{aligned}$$

(vgl. Bild 2.19) aus und erhalten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
m_W \ddot{x}_W + b_W \dot{x}_W + g_{xy} \Omega \dot{y}_W + k_W x_W \\
&= (m_W - g_{xy}) e_L \Omega^2 \cos \varphi_L - k_W e_L \cos \varphi_L \\
&\quad + m_R e_{LS} \Omega^2 \frac{\ell_{AS'}}{\ell} \cos \gamma + b_W e_S \Omega \sin \varphi_S, \quad (\text{A.11})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_W \ddot{y}_W + b_W \dot{y}_W - g_{xy} \Omega \dot{x}_W + k_W y_W \\
&= (m_W - g_{xy}) e_L \Omega^2 \sin \varphi_L - k_W e_L \sin \varphi_L \\
&\quad + m_R e_{LS} \Omega^2 \frac{\ell_{AS'}}{\ell} \sin \gamma - b_W e_S \Omega \cos \varphi_S \quad (\text{A.12})
\end{aligned}$$

für den Mittelpunkt W des exzentrischen Fanglagerzapfens an einem Pendelrotor mit exzentrischem Kardangelenk.

Ein einfacher Sonderfall liegt vor, wenn der Fanglagerzapfen zentrisch zum Rotor liegt. Die Punkte W und S fallen zusammen. Es gilt $e_S = 0$, $e_{LS} = e_L$ und $\gamma = \pi + \varphi_L$.

$$\begin{aligned}
m_W \ddot{x}_W + b_W \dot{x}_W + g_{xy} \Omega \dot{y}_W + k_W x_W \\
&= [(m_W - g_{xy} - m_R \ell_{AS'}/\ell) \Omega^2 - k_W] e_L \cos(\Omega t + \varphi_{L0}), \quad (\text{A.13})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_W \ddot{y}_W + b_W \dot{y}_W - g_{xy} \Omega \dot{x}_W + k_W y_W \\
&= [(m_W - g_{xy} - m_R \ell_{AS'}/\ell) \Omega^2 - k_W] e_L \sin(\Omega t + \varphi_{L0}), \quad (\text{A.14})
\end{aligned}$$

Dies sind die Bewegungsgleichungen für die Pendelzentrifuge, die wir in Abschnitt 2.6 angeben und die den Simulationsrechnungen des Kapitel 5 zu Grunde liegen.

Anhang B

Zum reibungsbehafteten Stoß

Wir betrachten den reibungsbehafteten Stoß zwischen der rotierenden Welle und der starr aufgehängten Fangfläche i (siehe Bild B.1).

Wir treffen folgende Annahmen:

- Das Fanglager sei starr aufgehängt.
- Während der gesamten Kontaktdauer tritt Reibung, niemals Haften auf.
- Es gelte das Coulombsche Reibungsgesetz. Die Reibzahl μ sei konstant.
- Die Orientierung der Reibkraft sei während des Stoßes konstant und bekannt.
- Gegenüber den Stoßkräften sollen alle übrigen Kräfte während des Stoßes vernachlässigt werden können.
- Wir beschränken uns auf periodische Umlaufbahnen mit zyklischer Symmetrie, die in Fanglagern in Form gleichmäßiger Polygone entstehen können.
- Die Energie, die der Bahnbewegung des Rotors während der Flugphase entzogen wird soll vernachlässigt werden.

Aus den letzten beiden Annahmen folgt, dass die Energie in der Bahnbewegung des Rotors vor und nach dem Stoß gleich sein muss. Einfallsgeschwindigkeit v_E und Ausfallsgeschwindigkeit v_A müssen gleich groß sein,

$$v_A = v_E = v .$$

Einfallswinkel ϕ_E und Ausfallswinkel ϕ_A sind jedoch ungleich. Die Winkeldifferenz bezeichnen wir mit 2γ . Das Bild B.1 zeigt einen Fall, bei dem die Reibkraft so orientiert ist, dass der Ausfallswinkel größer ist als der Einfallswinkel. Es gilt:

$$\phi_A = \phi_E + 2\gamma$$

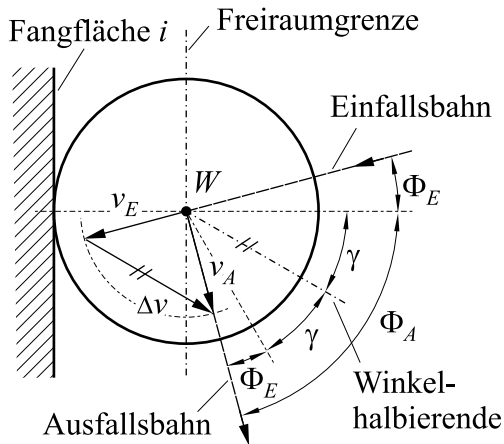


Bild B.1: Reibungsbehafteter Stoß zwischen der rotierenden Welle und der Fangfläche i bei einer periodischen Bewegung. Wir zeigen, dass die Winkelhalbierende zwischen Ein- und Ausfallsbahn gerade unter dem Reibwinkel γ zur Wandnormalen steht.

Eine Winkelhalbierende liegt genau zwischen Ein- und Ausfallsbahn unter dem Winkel γ zur Wandnormalen. Mit den Geschwindigkeitskomponenten normal und tangential zur Fangfläche formulieren wir die Impulserhaltungssätze in diesen Richtungen:

$$\begin{aligned} v_{nA} &= v_{nE} + \Delta v_n, & \Delta v_n &= \frac{1}{m} \int N_i dt, \\ v_{tA} &= v_{tE} + \Delta v_t, & \Delta v_t &= \frac{1}{m} \int T_i dt \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Δv_n und Δv_t sind die Komponenten der Geschwindigkeitsänderung Δv . Bei konstanter Reibzahl ($\mu = \text{const}$) folgt aus dem Reibgesetz $T_i = \mu N_i$ und den Gleichungen B.1

$$\frac{\Delta v_t}{\Delta v_n} = \mu. \quad (\text{B.2})$$

Andererseits folgt aus der Geometrie für das Verhältnis

$$\frac{\Delta v_t}{\Delta v_n} = \frac{v(\sin(2\gamma + \phi) - \sin \phi)}{v(\cos(2\gamma + \phi) + \cos \phi)}.$$

Mit Hilfe von Additionstheoremen wird hieraus nach Umformungen

$$\frac{\Delta v_t}{\Delta v_n} = \tan \gamma.$$

Die Winkelhalbierende liegt damit parallel zum Geschwindigkeitsänderungsvektor Δv . Mit Gleichung (B.2) finden wir schließlich

$$\tan \gamma = \mu, \quad (\text{B.3})$$

was zu zeigen war. Der reibungsbehaftete Stoß erscheint unter den getroffenen Annahmen so, als ob er an einer um den Reibwinkel γ geneigten Fangfläche ohne Reibung und ohne Verluste stattfinden würde. Die Winkelhalbierende wäre dann die Stoßnormale.

Bei einer gemessenen Bahn kann die Winkelhalbierende leicht eingetragen und so die herrschende Reibung abgeschätzt werden.

Anhang C

Systemparameter

An dieser Stelle sind die Systemparameter in Tabellen zusammengestellt. Wir wählen Systemparameter, die unseren Versuchen entsprechen. Dort, wo wir in den Rechnungen abweichenden Parameter verwenden, wird es angegeben.

Bei Fanglagern in Form regelmäßiger Polygone wählen wir für die Anordnung der Fangflächen auf dem Fanglager die Parameter

$$R_i = R ,$$

$$\alpha_i = \left(\frac{3}{4} + \frac{i-1}{m} \right) 2\pi , \quad i = 1, \dots, m .$$

Die Parameter R_i und α_i für unregelmäßige Polygone werden an der entsprechenden Stelle genannt.

Tabelle C.1: Laval-Rotor; Welle, Rotorscheibe und FL-Zapfen aus Stahl.

<i>Größe</i>	<i>Symbol</i>	<i>Wert</i>	<i>Einheit</i>	<i>Bemerkung</i>
Länge	2ℓ	1075	mm	Lagerabstand
Rotormasse	m_W	10,25	kg	Scheibe + Welle/3
Durchmesser, Rotor		300	mm	
Durchmesser, Welle		12	mm	
Steifigkeit	k_W	8940	N/m	aus Ausschwingversuch
Dämpfung	b_W	5,0	Ns/m	aus Ausschwingversuch
Eigenfrequenz	f_0	4,70	Hz	aus Ausschwingversuch
geometrische Exzentrizität	e_L	0,10	mm	Wellen-Vorkrümmung
Massenexzentrizität	e_S	0,16	mm	ohne Zusatzmasse
	e_S	0,37	mm	Zusatzmasse $m_{U2} = 20,6$ g
	e_S	1,02	mm	Zusatzmasse $m_{U4} = 69,8$ g

Tabelle C.2: **Pendelrotor**; Welle, Rotortrommel und FL-Zapfen aus Stahl.

<i>Größe</i>	<i>Symbol</i>	<i>Wert</i>	<i>Einheit</i>	<i>Bemerkung</i>
Länge, gesamt	ℓ	515	mm	Aufhängung bis FL
Länge, bis Massenmittelpkt.	$\ell_{AS'}$	379	mm	Aufhängung bis Massenmpkt.
Rotormasse	m_R	25,11	kg	Trommel + Welle + Kardan/2
Massenmoment (Rotation)	J_z	0,348	kg m ²	bezgl. Figurenachse
Massenmoment (Pendeln)	J_{xA}	4,066	kg m ²	bezgl. Aufhängung
Masse, reduziert	m_W	15,33	kg	gemäß Gl. (2.53)
Gyroskopischer Term	g_{xy}	1,312	kg	gemäß Gl. (2.55)
Ersatzsteifigkeit (Pendeln)	k_W	352,0	N/m	gemäß Gl. (2.54)
Dämpfung (Pendeln)	b_W	1,0	Ns/m	aus Ausschwingversuch
Eigenfreq. (ohne Rotation)	f_0	0,76	Hz	aus Ausschwingversuch
geometrische Exzentrizität	e_L	0,2	mm	im Kardangelenke
Unwucht-Ersatzmasse	m_{Un}	4,46	kg	gemäß Gl. (2.57)

Tabelle C.3: **PVC-Hülse**, aus Rohr gedreht.

<i>Größe</i>	<i>Symbol</i>	<i>Wert</i>	<i>Einheit</i>	<i>Bemerkung</i>
Länge		50	mm	
Radius, außen	r	25	mm	
E-Modul	E	3200	M Pa	Quelle: FE-Analyse
<i>Normalkraft-Kennlinie bei linienförmigem Kontakt (Laval-Rotor):</i>				
Exponent	p	1,7		Quelle: FE-Analyse
Steifigkeitsparameter	k_K	$5,6 \cdot 10^5$	N/mm ^{1,7}	Quelle: FE-Analyse
Verlustbeiwert	b_K	10	sec/m	gemäß Gl. (2.19)
<i>Normalkraft-Kennlinie bei schieferm Kontakt (Pendelrotor):</i>				
Exponent	p	2,0		Quelle: FE-Analyse
Steifigkeitsparameter	k_K	$4,6 \cdot 10^5$	N/mm ^{2,0}	Quelle: FE-Analyse
Verlustbeiwert	b_K	12	sec/m	gemäß Gl. (2.19)
<i>Reibzahl-Kennlinie gemäß Gl. (2.21):</i>				
Reibzahl-Eckwert	μ_0	0,19		bei v_0
Reibzahl-Eckwert	μ_1	0,17		bei v_1
Übergangsstelle	v_0	0,01	m/sec	
Übergangsstelle	v_1	0,80	m/sec	
Ausrundung	r_0	0,001	m/sec	
Ausrundung	r_1	0,1	m/sec	

Tabelle C.4: **Gummihülse**, aus einer Platte gefertigt (45 Shore Härte).

<i>Größe</i>	<i>Symbol</i>	<i>Wert</i>	<i>Einheit</i>	<i>Bemerkung</i>
Länge		50	mm	
Radius, außen	r	25	mm	
E-Modul	E	4,5	M Pa	Quelle: FE-Analyse
<i>Normalkraft-Kennlinie bei linienförmigem Kontakt (Laval-Rotor):</i>				
Exponent	p	1,7		Quelle: FE-Analyse
Steifigkeitsparameter	k_K	$4,4 \cdot 10^2$	N/mm ^{1,7}	Quelle: FE-Analyse
Verlustbeiwert	b_K	30	sec/m	gemäß Gl. (2.19)
<i>Normalkraft-Kennlinie bei schiefem Kontakt (Pendelrotor):</i>				
Exponent	p	2,0		Quelle: Messung
Steifigkeitsparameter	k_K	$3,5 \cdot 10^2$	N/mm ^{2,0}	Quelle: Messung
Verlustbeiwert	b_K	30	sec/m	gemäß Gl. (2.19)
<i>Reibzahl-Kennlinie gemäß Gl. (2.21):</i>				
Reibzahl-Eckwert	μ_0	0,24		bei v_0
Reibzahl-Eckwert	μ_1	0,19		bei v_1
Übergangsstelle	v_0	0,01	m/sec	
Übergangsstelle	v_1	0,40	m/sec	
Ausrundung	r_0	0,001	m/sec	
Ausrundung	r_1	0,1	m/sec	

Tabelle C.5: **Nachgiebige Aufhängung** der Fanglager, vier Gummifedern (Rundlager Simrit A 3040).

<i>Größe</i>	<i>Symbol</i>	<i>Wert</i>	<i>Einheit</i>	<i>Bemerkung</i>
Ersatz-Federsteifigkeit	k_{xF}, k_{yF}	90,74	N/mm	aus Ausschwingversuch
Ersatz-Drehfedersteifigkeit	k_{tF}	463	Nm/rad	aus Ausschwingversuch
Dämpferkonstante	b_{xF}, b_{yF}	68,2	kg/sec	aus Ausschwingversuch
Dämpferkonstante (Rotation)	b_{tF}	0,46	kg m ² /sec	aus Ausschwingversuch
Eigenfrequenz (Translation)	f_{0F}	38,5	Hz	aus Ausschwingversuch
Eigenfrequenz (Rotation)	$f_{0F\varphi}$	52,5	Hz	aus Ausschwingversuch

Tabelle C.6: **Regelmäßiges dreiseitiges Fanglager**, Aluminiumscheibe, CNC-gefräst.

<i>Größe</i>	<i>Symbol</i>	<i>Wert</i>	<i>Einheit</i>	<i>Bemerkung</i>
Außendurchmesser		200	mm	
Höhe der FL-Scheibe		30	mm	
Fanglagermasse	m_F	1,55	kg	
Massenmoment	J_F	4260	kg mm ²	um Massenmittelpunkt
Abstände d. Fangfl. v. Zentrum	R_i	29	mm	
Fanglagerspiel	s_i	4	mm	bei Hülse mit $r = 25$ mm

Tabelle C.7: **Regelmäßiges vierseitiges Fanglager**, Aluminiumscheibe, CNC-gefräst.

<i>Größe</i>	<i>Symbol</i>	<i>Wert</i>	<i>Einheit</i>	<i>Bemerkung</i>
Außendurchmesser		200	mm	
Höhe der FL-Scheibe		30	mm	
Fanglagermasse	m_F	1,57	kg	
Massenmoment	J_F	4260	kg mm ²	um Massenmittelpunkt
Abstände d. Fangfl. v. Zentrum	R_i	29	mm	
Fanglagerspiel	s_i	4	mm	bei Hülse mit $r = 25$ mm

Tabelle C.8: **Rundes Fanglager**, Aluminiumscheibe, CNC-gefräst.

<i>Größe</i>	<i>Symbol</i>	<i>Wert</i>	<i>Einheit</i>	<i>Bemerkung</i>
Außendurchmesser		200	mm	
Höhe der FL-Scheibe		30	mm	
Fanglagermasse	m_F	1,61	kg	
Massenmoment	J_F	4260	kg mm ²	um Massenmittelpunkt
Radius der Fangfläche	R	29	mm	
Fanglagerspiel	s	4	mm	bei Hülse mit $r = 25$ mm

Literaturverzeichnis

- [1] D. ABRAHAM, R. MARKERT und H. WITFELD. Experimentelle Untersuchungen zu aktiven und passiven Resonanzdurchlaufhilfen für extrem elastische Rotoren. *VDI-Berichte*, 695:145–169, 1988. 9, 10, 12, 16
- [2] H. BACH, R. HILLER und R. MARKERT. Representation of rotor stator rub in terms of equivalent forces for model based diagnostics. In: *Proc. of 3rd Int. Conf. on Acoustical and Vibratory Surveillance Methods and Diagnostic Techniques*, S. 723–732. Senlis (France), 1998. 11
- [3] A.R. BARTHA. Dry friction induced backward whirl: Theory and experiments. In: *[28] (IFTToMM'98)*, S. 756–767, 1998. 11, 16
- [4] W. Beitz und K.H. Grote, Hrsg. *Dubbel — Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer, Berlin u.a., 19. Aufl., 1997. 37
- [5] R.A. BILLETT. Shaft whirl induced by dry friction. *The Engineer*, 220:713–714, 1965. 13, 16
- [6] H.F. BLACK. Interaction of a whirling rotor with a vibrating stator across a clearance annulus. *J. Mech. Eng. Sci.*, 10(1):1–12, 1968. 13, 16
- [7] E. BROMMUNDT. Ein Reibschwinger mit Selbsterregung ohne fallende Kennlinie. *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)*, 75(11):811–820, 1995. 27, 28
- [8] A. BUDÓ. *Theoretische Mechanik*, Band 25 of *R. Rompe und E. Schmutzer (Hrsg.), Hochschulbücher für Physik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 11. Aufl., 1987.
- [9] D.W. CHILDS. *Turbomachinery Rotordynamics, Phenomena, Modeling, & Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York u.a., 1993.
- [10] D.W. CHILDS und D.S. MOYER. Vibration characteristics of the HPOTP (high-pressure oxygen turbopump) of the SSME (space shuttle main engine). *Trans. ASME, J. Eng. for Gas Turbines and Power*, 107:152–159, 1985. 13

- [11] F.K. CHOY und J. PADOVAN. Non-linear transient analysis of rotor-casing rub events. *J. Sound and Vib.*, 113(3):529–545, 1987. 9, 16
- [12] J.P. DEN HARTOG. *Mechanical Vibrations*, Kap. 7.3 Instability Caused by Friction, S. 289–295. McGraw-Hill, 3. Aufl., 1956. 4, 7, 8
- [13] F. DIMOFTE und R.C. HENDRICKS. Three-wave gas journal bearing behavior with shaft runout. In: [64] (*NASA CP 3344*), S. 3–11, 1997. 5, 15
- [14] H. ECKER. Nonlinear stability analysis of a single mass rotor contacting a rigid auxiliary bearing. In: [28] (*IFTtoMM'98*), S. 790–801, 1998. 11, 16
- [15] R. EDBAUER, P. MEINKE und P.C. MÜLLER. Passive Durchlaufhilfen beim Durchfahren biegekritischer Drehzahlen elastischer Rotoren. *VDI-Berichte*, 456:157–166, 1982. 9, 16
- [16] F.F. EHRICH. The dynamic stability of rotor/stator radial rubs in rotating machinery. *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, S. 1025–1028, Nov. 1969. 8, 16
- [17] F.F. EHRICH. Self-excited vibrations. In: C.M. Harris, Hrsg., *Shock and Vibration Handbook*, Kap. 5. McGraw-Hill, New York u.a., 3. Aufl., 1988. 7
- [18] U. FISCHER und W. STEPHAN. *Prinzipien und Methoden der Dynamik*. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1. Aufl., 1972. 53
- [19] M. FUMAGALLI und G. SCHWEITZER. Measurements on a rotor contacting its housing. In: *IMEchE Conference Transactions C500/085/96*, S. 779–788, London, 1996. Mechanical Engineering Publikation Ltd.
- [20] M. FUMAGALLI, P. VARADI und G. SCHWEITZER. Impact dynamics of high speed rotors in retainer bearings and measurement concepts. In: *Proc. of the Fourth International Symposium on Magnetic Bearings*, S. 239–244, Zürich, 1994.
- [21] J.J. GAO und Q.Q. MIN. Rotor-to-stator rub vibration in centrifugal compressor. In: [63] (*NASA CP 2409*), S. 235–244, 1985. 7
- [22] P. GOLDMANN und A. MUSZYŃSKA. Chaotic behavior of rotor/stator systems with rubs. In: *Transactions of the ASME 116*, S. 692–700, 1994.
- [23] R. GRISSOM. Partial rotor-to-stator rub demonstration. In: [63] (*NASA CP 2409*), S. 427–430, 1985. 9
- [24] J. GRUBER. Anstreifen eines Dampfturbinenrotors. In: [32] (*SIRM'97*), S. 155–162, 1997.

- [25] R.S. HAINES. A theory of contact loss at resolute joints with clearance. *J. Mech. Eng. Sci.*, 22(3):129–136, 1980. 13, 16
- [26] M. HEIL. Beitrag zur Auslegungsproblematik von Fanglagern in magnetgelagerten Rotoren bei hohen Drehzahlen. *Konstruktion (Berlin)*, 45:288–294, 1993. 4, 5
- [27] F. HOLZWEISSIG und H. DRESIG. *Lehrbuch der Maschinendynamik*. Fachbuchverlag Leipzig–Köln, 3. Aufl., 1992. 62
- [28] H. Irretier und R. Nordmann, Hrsg. *Proceedings of the Fifth International Conference on Rotor Dynamics; IFToMM–Tagung 1998 in Darmstadt*, Braunschweig, Wiesbaden, 1998. Vieweg. 141, 142, 144, 146, 147, 148
- [29] H. Irretier, R. Nordmann und H. Springer, Hrsg. *Schwingungen in rotierenden Maschinen (SIRM); Referate der Tagung 1991 an der Universität/GH Kassel*, Braunschweig, Wiesbaden, 1991. Vieweg.
- [30] H. Irretier, R. Nordmann und H. Springer, Hrsg. *Schwingungen in rotierenden Maschinen II (SIRM); Referate der Tagung 1993 an der Technischen Universität Wien*, Braunschweig, Wiesbaden, 1993. Vieweg.
- [31] H. Irretier, R. Nordmann und H. Springer, Hrsg. *Schwingungen in rotierenden Maschinen III (SIRM); Referate der Tagung 1995 an der Universität Kaiserslautern*, Braunschweig, Wiesbaden, 1995. Vieweg. 145, 147
- [32] H. Irretier, R. Nordmann und H. Springer, Hrsg. *Schwingungen in rotierenden Maschinen IV (SIRM); Referate der Tagung 1997 an der Universität/GH Kassel*, Braunschweig, Wiesbaden, 1997. Vieweg. 142, 143, 144, 146
- [33] J.L. ISAKSSON. *Dynamics of Rotors Influenced by Rubbing Contacts*. Dissertation, Linköping University, Department of Mechanical Engineering, 1997. Linköping Studies in Science and Technology: Diss. Nr. 483. 10, 16
- [34] H. JERICHA, H.P. PIRKER und H. LANG. Auswirkung von Rotorstreifen auf Getriebe und Kupplung bei schnellaufenden Getriebeturbosätzen. In: [32] (*SIRM'97*), S. 163–171, 1997. 10, 16
- [35] D.C. JOHNSON. Synchronous whirl of a vertical shaft having clearance in one bearing. *J. Mech. Eng. Sci.*, 4(1):85–93, 1962. 8, 16
- [36] B. KAYE. *Chaos & Complexity*. VCH, Weinheim u.a., 1993. 98

- [37] W. KELLENBERGER. Spiral vibrations due to the seal rings in turbogenerators thermally induced interaction between rotor and stator. *Trans. ASME, J. Mech. Des.*, 102:177–184, 1980. 14, 16
- [38] E. KRÄMER. *Dynamics of Rotors and Foundations*. Springer, Berlin u.a., 1993. 43
- [39] R. LIEBICH. Nichtlineare Schwingungen aus Rotor–Stator–Kontakt unter Berücksichtigung von thermischen Effekten. In: [32] (*SIRM'97*), S. 172–180, 1997. 14, 16
- [40] R. LIEBICH. *Der Rotor–Stator-Kontakt unter Berücksichtigung von thermischen Effekten*. Fortschritt–Berichte VDI, Reihe 1, Nr. 296. VDI Verlag, Düsseldorf, 1998. 14, 16
- [41] R. LIEBICH. Rotorinstabilitäten infolge sanfter Statorberührung — Spiral Vibrations. *Technische Mechanik*, 18(2):141–151, 1998. 14, 16
- [42] R. LIEBICH. Rub induced non–linear vibrations considering the thermo-elastic effect. In: [28] (*IFTtoMM'98*), S. 802–815, 1998. 14, 16
- [43] K. MAGNUS. *Kreisel — Theorie und Anwendungen*. Springer, Berlin u.a., 1971. 48, 94, 124, 130
- [44] K. MAGNUS. Beiträge zur Kinetik des Kurvenkreisels. *Ingenieur–Archiv*, 43(2/3):145–157, 1974. 14, 16, 52, 97
- [45] K. MAGNUS und H.H. MÜLLER. *Grundlagen der Technischen Mechanik*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1990. 127
- [46] W.M. MANSOUR und D. PAVLOV. The mechanism of gyroscopic tracking: Part 1. *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, S. 430–436, Mai 1973. 14, 16, 52, 97
- [47] R. MARKERT. Amplitudenabschätzung bei der instationären Resonanzdurchfahrt. Bericht, Institut für Technische Mechanik, Universität der Bundeswehr, Hamburg, 1996. Festschrift zum 60. Geb. von Prof. Witfeld. 63
- [48] R. MARKERT, H. PFÜTZNER und R. GASCH. Biegeschwingsverhalten rotierender Wellen beim Durchlaufen der kritischen Drehzahlen. *Konstruktion*, 29(9):355–365, 1977. 63
- [49] R. MARKERT, H. PFÜTZNER und R. GASCH. Mindestantriebsmoment zur Resonanzdurchfahrt von unwuchtigen elastischen Rotoren. *Forsch. Ing.-Wes. (VDI)*, 46(2):33–68, 1980. 63

- [50] R. MARKERT, K. POTHMANN und G. WEGENER. Unwuchterregte Schwingungen eines Mehrfreiheitsgradrotors mit Fanglager. *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)*, 79(Suppl. 2):301–302, 1999. 12, 16
- [51] R. MARKERT und G. WEGENER. Dynamik von elastischen Rotoren in Fanglagern. In: [31] (*SIRM'95*), S. 20–30, 1995. 10, 11, 14, 16
- [52] R. MARKERT und G. WEGENER. Anlege- und Trennvorgänge von elastischen Rotoren in Fanglagern. *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)*, 76(Suppl. 5):323–324, 1996. 10
- [53] R. MARKERT und G. WEGENER. Transient vibrations of elastic rotors in retainer bearings. In: *Conf. Proceedings of ISROMAC-7, Vol. 2*, S. 764–774. Bird Rock Publishing House, 1998. 11, 16
- [54] R. MARKERT, G. WEGENER, G. SANTOS und I.F. SARACHO. Retainer bearings - a technical application of moderate rotor to stator rub. In: E.P. Hofer, H.I. Weber und D. Pamplona, Hrsg., *Proceedings of EURODINAME 99*, S. 25–30, 1999.
- [55] A. MUSZYŃSKA. On rotor dynamics (survey). In: *Nonlinear Vibration Problems*, S. 35–135. PWN - Polish Scientific Publisher, Warszawa, 1972. 5, 7
- [56] A. MUSZYŃSKA. Rub — an important malfunction in rotating machinery. In: *Proc. Senior Mechanical Engineering Seminar*, S. 409–414, Carson City, Nevada, 1983. Bentley Nevada Corporation.
- [57] A. MUSZYŃSKA. Demonstration of various rotor instabilities. In: [63] (*NASA CP 2409*), S. 409–414, 1985. 9
- [58] A. MUSZYŃSKA. Rotor instabilities due to loose rotating part. In: [63] (*NASA CP 2409*), S. 431–437, 1985. 3
- [59] A. MUSZYŃSKA. Whirl and whip — rotor/bearing stability problems. In: [63] (*NASA CP 2409*), S. 155–178, 1985.
- [60] A. MUSZYŃSKA. Rotor-to-stationary element rub-related vibration phenomena in rotating machinery — literature survey. *Shock and Vib. Dig.*, 21(3):3–11, 1989. 7, 8, 14
- [61] A. MUSZYŃSKA. Chaotic vibrations of rotor/bearing/stator systems with looseness or rubs. *Nonlinear Vib. (ASME)*, DE-54:187–194, 1993. 13
- [62] *NASA Conference Publication 2338: Rotordynamic Instability Problems in High-Performance Turbomachinery 1984; Proceedings of a workshop in College Station, Texas*. NASA Scientific and Technical Information Branch, 1984.

- [63] *NASA Conference Publication 2409: Instability in Rotating Machinery 1985; Proceedings of a symposium in Carson City, Nevada.* NASA Scientific and Technical Information Branch, 1985. 142, 145
- [64] *NASA Conference Publication 3344: Rotordynamic Instability Problems in High-Performance Turbomachinery 1996; Proceedings of a workshop in College Station, Texas.* NASA Scientific and Technical Information Branch, 1997. 142, 148
- [65] B.L. NEWKIRK und N.Y. SCHENECTADY. Shaft rubbing. *Mech. Eng. (USA)*, 48(8):830–832, 1926. 13
- [66] V.I. OLIMPIYEV. The rolling of an unbalanced flexible rotor along a stator. *Mechanical Science (Mashinovedeniye)*, 1:32–35, 1976. 8, 16
- [67] W.H. PRESS, A.T. SAUL, W.T. VETTERLING und B.P. FLANNERY. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing.* Cambridge University Press, Cambridge, 2. Aufl., 1992. 54, 55, 59
- [68] U. RIEDEL. *Laufstabilität flüssigkeitsgefüllter Zentrifugen.* Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 11, Nr. 174. VDI Verlag, Düsseldorf, 1992. 3
- [69] V.I. ROSENBLUM. Entstehung mehrfacher Wellenbrüche nach dem Bruch einer Laufschaufel oder Radscheibe bei Dampfturbinen. *Allianz Report*, 68(5):176, 1995. 7
- [70] P. SCHMIECHEN und D.J. EWINS. Travelling-wave-speed instability. In: [28] (*IF-ToMM'98*), S. 829–840, 1998. 11
- [71] H.G. SCHUSTER. *Deterministisches Chaos, Eine Einführung.* VCH, Weinheim u.a., 1994. 98
- [72] G. SCHWEITZER, W. SCHIEHLEN, P.C. MÜLLER, u.a. Kreiselverhalten eines elastisch gelagerten Rotors. *Ingenieur-Archiv*, 41:110–140, 1972.
- [73] U. SIMON und E. BROMMUNDT. Periodische Bewegungen einer Pendelzentrifuge in einem mehreckigen Fanglager. In: [32] (*SIRM'97*), S. 181–188, 1997. 15, 16
- [74] U. SIMON und E. BROMMUNDT. Periodische Bewegungen einer rotierenden Welle in polygonförmigen Fanglagern. *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)*, 77(Suppl. 1):S313–S314, 1997. 15, 16
- [75] W. I. SMIRNOW. *Lehrgang der höheren Mathematik, Teil II.* Hochschulbücher für Mathematik, Band 2. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1986. 54
- [76] W.H. STEEB. *A Handbook of Terms Used in Chaos and Quantum Chaos.* BI-Wiss.-Verl., Mannheim u.a., 1991. 98

- [77] W.H. STEEB und A. KUNICK. *Chaos in dynamischen Systemen*. BI-Wiss.-Verl., Mannheim u.a., 2. Aufl., 1989. 98
- [78] A. STODOLA. *Dampf- und Gasturbinen*. Springer, Berlin, 6. Aufl., 1924.
- [79] W.M. SZCZYGIELSKI. *Dynamisches Verhalten eines schnell drehenden Rotors bei Anstreibvorgängen*. Dissertation, ETH Zürich, Juli 1986. Diss. ETH Nr. 8094. 15, 16
- [80] W.M. SZCZYGIELSKI. Application of chaos theory to the contacting dynamics of high-speed rotors with rubbing. In: *Proc. of ASME Design Technology Conference, Rotating Machinery Dynamics*, Boston, 1987. 15, 16
- [81] W.M. SZCZYGIELSKI und G. SCHWEITZER. Dynamics of a high-speed rotor touching a boundary. In: G. Bianchi und W. Schiehlen, Hrsg., *Proc. Dynamics of Multibody Systems*, S. 286–298, Berlin, Heidelberg, 1986. IUTAM/IFTToMM Symposium Udine 1985, Springer. 15, 16
- [82] A. TONDL und H. SPRINGER. Ein Beitrag zur Klassifizierung von Rotorschwingungen und deren Ursachen. In: [31] (*SIRM'95*), S. 257–267, 1995. 8
- [83] J.M. VANCE und F.J. LAUDADIO. Rotordynamic instability in centrifugal compressors — are all the excitations understood? *Trans. ASME, J. Eng. Power*, 103:288–293, 1981.
- [84] W. WALLISCH und M. HERMANN. *Schießverfahren zur Lösung von Rand- und Eigenwertaufgaben*. Teubner-Texte zur Mathematik, Bd. 75. BSB Teubner Verlagsges., Leipzig, 1985. 55
- [85] G. WEGENER. *Elastische Fanglager zur Amplitudenbegrenzung elastischer Rotoren*. Dissertation, TU Darmstadt, 2000. VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 11, Nr. 290, VDI Verlag. 12
- [86] G. WEGENER und R. MARKERT. Influence of contact and impact on the dynamics of an elastic rotor with an elastic retainer bearing. In: V.I. Babitsky, Hrsg., *Dynamics of Vibro-Impact Systems; Proceedings of the EUROMECH Colloquium 386 in Loughborough, 1998*, S. 89–98, Berlin u.a., 1999. Springer. 12, 16
- [87] G. WEGENER, R. MARKERT und K. POTHMANN. Steady-state-analysis of a multi-disk or continuous rotor with one retainer bearing. In: [28] (*IFTToMM'98*), S. 816–828, 1998. 12, 16
- [88] R. WIEBELITZ. Zur Theorie der erzwungenen Schwingungen des symmetrischen Kreisels. *Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP)*, 6:362–377, 1955.

- [89] R. WORG. *Deterministisches Chaos, Wege in die nichtlineare Dynamik*. BI-Wiss.-Verl., Mannheim u.a., 1993. 98
- [90] S. YANABE und E.D. BERNARD. Whirl simulation of a rotor colliding with annular guard during acceleration. In: [28] (*IFTToMM'98*), S. 780–789, 1998. 10, 16
- [91] W. YANG, X. TANG und S. HOGAT. Nonlinear response of rotor to stator rubs. In: [64] (*NASA CP 3344*), S. 269–278, 1997. 10, 16
- [92] O.C. ZIENKIEWICZ und R.L. TAYLOR. *The Finite Element Method*, Band 1: The Basis. Arnold, London, 5. Aufl., 2000. 36
- [93] G. ZIPPE und P. MEINKE. Verfahren und Vorrichtung zum Durchlaufen kritischer Drehzahlen langgestreckter Rotoren; Patentschrift DE 2632586 C2. Bundesrepublik Deutschland, Deutsches Patentamt, Mai 1983. Anmeldetag: 20.7.1976. 6, 9