Finite-Volumen-Methode (FVM)

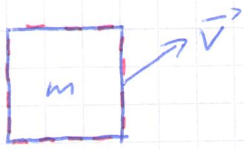
+ Erhaltungsgrößen automatisch erfüllt!
+ Erlaubt unstetigkeiten
- Konvergenztheorie (FEM besser)

Allgemein:
- → Kompressible Fluide und/oder Druckphänomene → FVM
- → Laminare „gutmütige" Strömung → FEM

Parameter (gesucht):
- Geschwindigkeit $\vec{v}$
- Dichte ρ
- Druck p
- Temperatur T

Erhaltungsgrößen:
- Masse
- Impuls
- Energie
- Zustandsgleichung (ideales Gas)

Kontrollmasse → Kontrollvolumen



Massenerhaltung: Reynold'scher Transportsatz

$$0 \overset{!}{=} \frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho \, dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} \rho \cdot \vec{v}\cdot\vec{n} \, dS$$

$$\Rightarrow \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\oint_{\partial V} \rho \, \vec{v}\cdot\vec{n} \, dS$$

Impulserhaltung:

Volumenkraftdichte

Scheertensor

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \varrho\vec{v}\,dV = \int_V \frac{\partial(\varrho\vec{v})}{\partial t}dV + \oint_{\partial V} \varrho\vec{v}\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \int_V \varrho\cdot\vec{f}\,dV + \oint_{\partial V} \overleftrightarrow{\sigma}\cdot\vec{n}\,dS$$

Satz von Gauss: $\int_V \frac{\partial(\varrho\vec{v})}{\partial t}dV + \int_V \vec{\nabla}\cdot(\varrho\vec{v}\vec{v})\,dV = \int_V \varrho\vec{f}\,dV + \int_V \vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}\,dV$

Newton'sche Fluide: $\overleftrightarrow{\sigma} = \mu[\nabla\vec{v} + (\nabla\vec{v})^T] - p\cdot\hat{I}$

Navier-Stokes-Gleichung $\triangleq$ Inkompressibilität + Newton'sches Fluid

$\Rightarrow \frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0$

Masse: $\oint_{\partial V} \varrho\,\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = 0$ (Kontinuitätsgleichung)

Impuls: $\int_V \varrho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}dV + \oint_{\partial V}\varrho\vec{v}\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \int_V \varrho\cdot\vec{f}\,dV + \oint_{\partial V}\left(\mu[\nabla\vec{v} + (\nabla\vec{v})^T] - p\hat{I}\right)dS$

Implementierung: Näherung der Integrale und Randwerte!

Courant-Zahl: $c = \frac{v\cdot\Delta t}{\Delta x}\begin{cases} < 1 & \text{explizit} \\ \approx 1 & \text{implizit}\end{cases}$ Achtung bei kompressiblen Fluiden!

Bernoullische Druckgleichung: (Reibungsfrei, inkompressibel)

$p + \varrho\cdot g\cdot h + \frac{\varrho}{2}v^2 = \text{const.}$ (im Prinzip Energieerhaltung)

statischer Druck

Totaler Druck! ← ohne Höhendruck

Turbulenzmodellierung:

Kolmogorov-Längenskala: $\eta \approx \left(\frac{\tilde{\mu}^3 L}{(\Delta \vec{v})^3}\right)^{\frac{1}{4}}$ $\Bigg\}$ $\eta \approx \left(\frac{(\mu/\varrho)^3 \cdot L}{|\vec{v}|^3}\right)^{\frac{1}{4}}$

$\eta \sim L \cdot Re^{-3/4}$ (Meteorologie: 0,1 - 10mm)

$$\eta = \left(\frac{(\text{dynamische Viskosität})^3}{\text{Mittlere Dissipationrate pro Masseneinheit}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

turbulente kin. Energie

Dissipationsrate

- Large-Eddy-Simulationen (Meteorologie)
- Raynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) „k-ε-Modell"