

ULMER ZENTRUM FÜR WISSENSCHAFTLICHES RECHNEN

# Mathematische Modellbildung und Simulation in der Mechanik 1

—

Statik

## MMSM 1

*Dr.-Ing. Ulrich Simon*

*Dipl.-Math. Bernhard Wieland*

Wintersemester 2011/2012

## Inhaltsverzeichnis

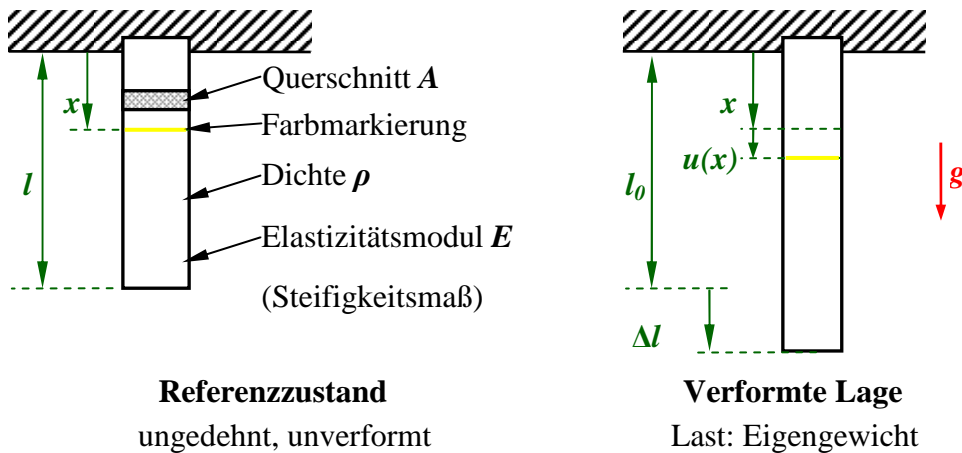
|       |   |    |
|-------|---|----|
| 1     | Einführendes Beispiel .....                             | 4  |
| 1.1   | Analytische Lösung .....                                | 4  |
| 1.1.1 | Aufstellen der Differentialgleichung.....               | 4  |
| 1.1.2 | Anpassen an Randbedingungen .....                       | 5  |
| 1.2   | Numerische Lösung .....                                 | 6  |
| 2     | Allgemeines .....                                       | 7  |
| 2.1   | Ziel der Vorlesung .....                                | 7  |
| 2.2   | Zur Gliederung der Vorlesung .....                      | 7  |
| 2.3   | Allgemeines zu Größen, Dimensionen, Einheiten .....     | 8  |
| 3     | Statik starrer Körper.....                              | 9  |
| 3.1   | Die Kraft .....   | 9  |
| 3.2   | Das Moment.....   | 12 |
| 3.3   | Das Schnittprinzip von Euler .....                      | 14 |
| 3.4   | Freikörperbilder .....                                  | 15 |
| 3.5   | Verschiedene Schnittkräfte und -momente .....           | 16 |
| 3.6   | Freiheitsgrade und Bindungen .....                      | 18 |
| 3.6.1 | Freiheitsgrade .....                                    | 18 |
| 3.6.2 | Verschiedene Bindungen und Auflager .....               | 18 |
| 3.6.3 | Statische Bestimmtheit.....                             | 20 |
| 3.7   | Statisches Gleichgewicht .....                          | 20 |
| 3.8   | Rezept zum Lösen von Aufgaben aus der Statik .....      | 21 |
| 3.8.1 | Rechenbeispiel „Bizepskraft“ .....                      | 22 |
|       | .....   | 23 |
|       | .....   | 23 |
| 3.9   | Mittelpunkte.....                                       | 25 |
| 4     | Elastostatik / Festigkeitslehre .....                   | 27 |
| 4.1   | Die Spannung.....                                       | 27 |
| 4.1.1 | Normal- und Schubspannungen .....                       | 29 |
| 4.1.2 | Der allgemeine 3d Spannungszustand.....                 | 30 |
| 4.2   | Dehnungen .....   | 31 |
| 4.2.1 | Der allgemeine 3d Dehnungszustand.....                  | 32 |
| 4.3   | Materialgesetze .....                                   | 32 |
| 4.3.1 | Linear-elastisches, isotropes Materialgesetz .....      | 32 |
| 4.3.2 | Verallgemeinertes Hookesches Gesetz (Anisotropien)..... | 33 |
| 4.3.3 | Kompliziertere Materialgesetze .....                    | 35 |
| 4.4   | Einfache Lastfälle .....                                | 36 |
| 4.4.1 | Zug und Druck .....                                     | 36 |
| 4.4.2 | Scherung.....   | 36 |

---

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 4.4.3 | Biegung (Kragbalken) .....                                     | 37 |
| 4.4.4 | Torsion .....  | 39 |
| 4.5   | Spannungs- und Dehnungstransformation .....                    | 40 |
| 4.5.1 | Mohrscher Spannungskreis (2d).....                             | 40 |
| 4.5.2 | Spannungstransformation für den allgemeinen 3d-Fall .....      | 43 |
| 4.5.3 | Hauptachsentransformation im 3-achsigen Spannungszustand ..... | 43 |
| 4.5.4 | Hauptachsentransformation für die Dehnung .....                | 45 |
| 4.6   | Wärmedehnung und -Spannung.....                                | 45 |
| 5     | Energie, Arbeit, Leistung .....                                | 47 |
| 5.1.1 | Energie .....  | 47 |
| 5.1.2 | Arbeit.....  | 48 |
| 5.1.3 | Leistung.....  | 48 |
| 6     | Das Prinzip der Virtuellen Verschiebung .....                  | 49 |
| 7     | Einführung in die Finite-Elemente-Methode .....                | 52 |
| 7.1   | Differentialgleichung der Linearen Elastizität.....            | 52 |
| 7.2   | Schwache Ableitungen.....                                      | 54 |
| 7.3   | Variationsformulierungen und Galerkin-Verfahren .....          | 54 |
| 7.4   | Die Finite-Elemente-Methode.....                               | 54 |
| 8     | Kontaktprobleme.....   | 55 |
| 8.1   | Lagrange-Methode .....   | 55 |
| 8.2   | Penalty-Methode .....  | 55 |

# 1 Einführendes Beispiel

Wir betrachten einen Zugstab unter Eigengewicht, der am oberen Ende fest aufgehängt sei.



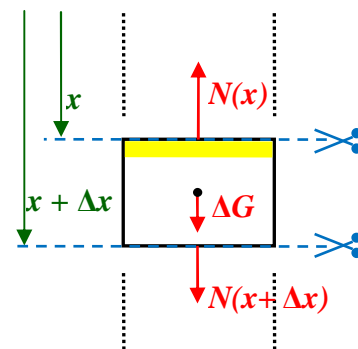
**Gesucht:** Verschiebungsfeld  $u(x)$ . Vermutung...?

## 1.1 Analytische Lösung

### 1.1.1 Aufstellen der Differentialgleichung

*Kräftegleichgewicht:*

Mit dem Querschnitt  $A$  des Balkens und der Dichte  $\rho$  ergibt sich die auf die Länge bezogene Dichte  $\mu = \rho A$ , die sogenannte Längendichte. Auf ein Balkenstück der Länge  $\Delta x$  wirkt also die Gewichtskraft  $\Delta G = \mu \Delta x \cdot g$ , wobei  $g = 9,81 \text{ N/kg}$ . Schneiden wir nun ein Stück des Balkens aus zwischen  $x$  und  $x + \Delta x$ , so entstehen neben der Gewichtskraft weitere Normalkräfte  $N(x)$  an der Stelle  $x$  und  $N(x + \Delta x)$  an der Stelle  $x + \Delta x$ , wie auch in der Abbildung dargestellt.



Im Kräftegleichgewicht gilt, dass die Summe aller Kräfte in Koordinatenrichtung Null ergeben muss. Es folgt also

$$N(x + \Delta x) - N(x) + \mu g \Delta x = 0.$$

Teilen wir beide Seiten durch  $\Delta x$  und betrachten den Grenzübergang  $\Delta x \rightarrow 0$ , erhalten wir

$$N'(x) + \mu g = 0.$$

*Werkstoff:*

Wir nehmen an, der Balken bestehe aus einem linear-elastischen isotropen Werkstoff. Dies bedeutet, dass der Werkstoff richtungsunabhängige Eigenschaften besitzt (im Gegensatz zum Beispiel zu Holz, wo man mit oder entgegengesetzt der Faserrichtung unterscheiden muss) und es gilt das folgende sogenannte *Hooksche Gesetz*:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

wobei  $\sigma$  die Spannung, also die Kraft pro Fläche angibt, hier also  $N/A$ , und  $\varepsilon$  die Dehnung, also die relative Auslenkung. Wie bereits erwähnt bezeichnet der Elastizitätsmodul  $E$  ein Maß der Steifigkeit des Werkstoffs.

*Kinematik (Dehnungsdefinition):*

Die Dehnung  $\varepsilon$  bezeichnet die Längenänderung pro Ursprungslänge. In Formeln bedeutet dies

$$\varepsilon = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x},$$

was im Grenzübergang, für  $\Delta x \rightarrow 0$ ,

$$\varepsilon = u'(x)$$

ergibt. Setzen wir dies und die Spannung in das Hooksche Gesetz ein und lösen nach  $N$  auf, so erhalten wir  $N(x) = EAu'(x)$  und  $N'(x) = EAu''(x)$ . Insgesamt, mit Hilfe des Kräftegleichgewichts, erhalten wir also die Differentialgleichung

$$\boxed{EAu''(x) + \mu g = 0.}$$

### 1.1.2 Anpassen an Randbedingungen

Umformen der Differentialgleichung ergibt

$$u''(x) = -\frac{\mu g}{EA} = \text{const.}$$

Die Lösung  $u$  ergibt sich also zu  $u = -\frac{1}{2} \frac{\mu g}{EA} x^2 + c_1 x + c_2$ . Aus der festen Einspannung des Balkens am oberen Ende ergibt sich die Randbedingung

$$u(0) = 0.$$

Einsetzen liefert direkt  $c_2 = 0$ . Am unteren (freien) Ende des Balkens, also an der kräftefreien Seite, erhalten wir die Randbedingung

$$N(\ell) = 0 \Rightarrow u'(\ell) = 0.$$

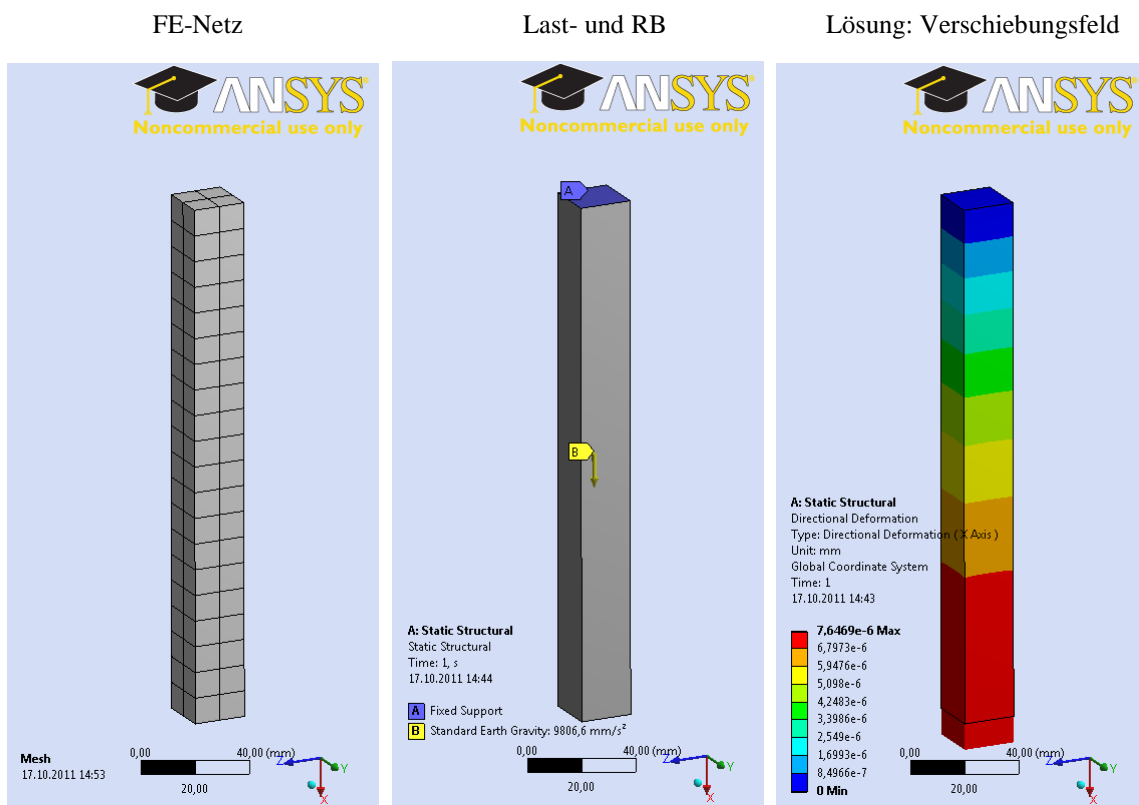
Damit erhalten wir als Wert für die zweite unbekanntete Konstante  $c_1 = \ell \frac{\mu g}{EA}$ . Zusammenfassend gilt

$$\boxed{u(x) = -\frac{\mu g}{EA} \left( \frac{x}{2} - \ell \right) x.}$$

## 1.2 Numerische Lösung

Mit Hilfe des Simulations-Programmpakets ANSYS-Workbench wird der gegebene Zugstab als Finite-Elemente-Modell beschrieben, dann gelöst und die Ergebnisse dargestellt. Die typischen Arbeitsschritte sind:

- a) Preprocessor (Modellbildung)
  - Geometrie erstellen/importieren
  - Diskretisierung (Vernetzung in Finite Elemente) durchführen
  - Materialgesetze und -parameter zuweisen
  - Last- und Randbedingungen aufgebracht.
- b) Solver (Processor)
  - Gleichungssystem wird aufgestellt
  - Gleichungssystem wird gelöst
- c) Postprocessor (Auswertung)
  - Ergebnisse darstellen
  - Lösung überprüfen, diskutieren, verifizieren, validieren, ...



**Finite-Elemente-(FE)-Modell (ANSYS Workbench) des Zugstabs. Diskretisierung in FE (links). Last- und Randbedingungen (mitte): Feste Einspannung oben, Gravitation (gelber Pfeil). Lösung (rechts): Feld der vertikalen Verschiebungen  $u_x(x, y, z)$ . Oben sind die kleinsten Verschiebungen aber der größte Verschiebungs-Gradient zu finden.**

## 2 Allgemeines

### 2.1 Ziel der Vorlesung

Die Studierenden sollen typische praktische Fragestellungen aus der Mechanik (Dynamik), wie sie z.B. in einem Maschinenbaubetrieb auftauchen könnten, verstehen und in die Mathematik übersetzen können. Dies beinhaltet die Erstellung geeigneter Modelle unter "vernünftigen" Annahmen und Vereinfachungen sowie die Auswahl und Benutzung passender Werkzeuge (mathematische Methoden, Programme) für die numerische Lösung, die für Praktiker verständlich aufbereitet und dargestellt werden sollen.

### 2.2 Zur Gliederung der Vorlesung

Die Vorlesung MMSM 1 gliedert sich wie auch zahlreiche Lehrbücher der Technischen Mechanik in die Gebiete *Statik* und *Elastostatik bzw. Festigkeitslehre*. Dazu werden wir in dieser Vorlesung eine Einführung zu *Kontaktproblemen* geben und unterschiedliche Lösungsverfahren besprechen.

#### **Statik starrer Körper**

Die *Statik* (griechisch *statos* = stillstehend) behandelt das Kräftegleichgewicht an ruhenden (oder sich gleichförmig bewegenden) Körpern.

Unter einem *Körper* versteht man in der Mechanik alles, was Masse besitzt (genauer: Ruhemasse  $> 0$ ). Neben Festkörpern also auch Flüssigkeiten und Gase.

Der *starre Körper* ist eine Vereinfachung, eine Idealisierung, ein Modell. Er verformt sich nicht. Tatsächlich sind alle Körper mehr oder weniger nachgiebig<sup>1</sup>. Diese Idealisierung ist brauchbar, solange die Verformungen uninteressant sind und gegenüber den sonstigen Abmessungen vernachlässigt werden können.

#### **Elastostatik / Festigkeitslehre**

In der *Elastostatik* (griechisch *elastos* = verformbar) wird die Idealisierung der starren Körper aufgegeben. An ihre Stelle tritt eine erweiterte Idealisierung, das Modell vom elastischen (= reversibel verformbaren) Körper aus homogenem Material.

Neben den äußeren, aufgeprägten Kräften, der so genannten *Belastung* werden nun auch die „inneren“ Kräfte, die so genannte *Beanspruchung* und die Verformungen im Material betrachtet. *Spannungen* und *Dehnungen* rücken in den Mittelpunkt des Interesses.

---

<sup>1</sup> Das Auftreffen einer Mücke beispielsweise führt zu einer Einwölbung der Windschutzscheibe. Anderenfalls würde der Aufprall gar keine Geräusche verursachen.

Typische Fragen einer Festigkeitsuntersuchung sind:

- Wann bricht etwas und wo beginnt es zu brechen?
- Wie groß sind die Verformungen?

### Kontaktprobleme

Kontakte sind einseitige Bindungen, das heißt Bewegungen werden einseitig eingeschränkt was zu Ungleichungen führt. Diese haben in der Regel nicht-lineare Struktur, was die Berechnung von Lösungen oft sehr aufwendig werden lässt.

Typische Fragestellungen bei Kontaktproblemen sind:

- Tritt Kontakt zwischen zwei Körpern auf und wenn ja, wo?
- Was für Verformungen bzw. Dehnungen und Spannungen treten an den Körpern im Kontakt auf?

## 2.3 Allgemeines zu Größen, Dimensionen, Einheiten

Der Wert einer physikalischen Größe erscheint als Produkt aus Zahlenwert und Einheit.

$$\text{Größe} = \text{Zahlenwert} \cdot \text{Einheit}$$

$$\text{Beispiel: Länge } L = 2 \cdot m = 2 \text{ m}$$

Außerdem existieren die folgenden Klammer-Operatoren, die die einzelnen Faktoren liefern:

$$\text{Zahlenwert} = \{ \text{Größe} \},$$

$$\text{Einheit} = [ \text{Größe} ].$$

Die „Unsitte“, die Einheiten bei der Beschriftung von Diagrammachsen und Tabellenköpfen in eckige Klammern zu setzen (~~falsch: Länge  $L$  [m]~~), entstammt einem Missverständnis. Die Norm empfiehlt die Schreibweisen:

$$\text{richtig: Länge } L / m \quad \text{oder} \quad \text{Länge } L \text{ in } m$$

Beim Rechnen sollten die Einheiten genau wie Faktoren berücksichtigt und bis zum Ergebnis „durchgeschleift“ werden.

Die für die Mechanik wichtigen Dimensionen (oder Basisgrößen) sind *Länge*, *Masse*, *Zeit*. Dafür werden nach internationalem Standard (SI) die drei Basiseinheiten

$$m \text{ (Meter)}, \quad kg \text{ (Kilogramm)}, \quad sec \text{ (Sekunde)}$$

verwendet.



### 3 Statik starrer Körper

Zunächst führen wir den zentralen Begriff in der Statik, die Kraft ein. Aus der Kraft werden später das *Moment* und die *Spannung* abgeleitet. Das Hauptwerkzeug der Statik ist das *Kräfte- und Momentengleichgewicht*.

#### 3.1 Die Kraft

##### Die Kraft als Axiom

Der Begriff *Kraft* wird aus der Erfahrung gewonnen. Fast jeder glaubt zu wissen, was eine Kraft ist. Wir „kennen“ z.B. Muskelkräfte, Gewichtskräfte oder Druckkräfte aus unmittelbarer körperlicher Erfahrung. Tatsächlich allerdings wird die *Kraft* in der Mechanik nicht streng definiert. Der Begriff der Kraft ist *axiomatisch* (Axiom: Grundsatz ohne Definition und Beweis).

##### Zweites Newtonsches Axiom:

$$Kraft = Masse \cdot Beschleunigung \quad \text{oder} \quad F = m \cdot a.$$

Bei der Messung von Kräften spiegelt sich diese Tatsache wider. Kräfte können nicht unmittelbar gemessen oder beobachtet werden. Noch nie ist ein „Kraftpfeil“ in der Natur gesehen worden. Kraftaufnehmer „messen“ stets die Wirkung von Kräften: wie zum Beispiel Dehnungen (Federwaage), Widerstandsänderungen (Dehnungsmessstreifen), Ladungsverschiebungen (Piezoeffekt).

##### Zum Merken:

*Die Kraft ist die Ursache für eine Beschleunigung (Bewegungsänderung)  
oder eine Verformung (Dehnung) eines Körpers.<sup>2</sup>*

##### Einheit der Kraft

Die Einheit der Kraft ist das *Newton* (N):

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2.$$

*Beispiel:* „Gewichtskraft“

Welche Gewichtskraft  $F_G$  übt eine Masse ( $m = 100 \text{ g}$ ) auf die Erdoberfläche aus? Es gilt

$$F_G = m \cdot g$$

---

<sup>2</sup> Die in der Mechanik betrachteten „Körper“ können fest, aber auch flüssig oder gasförmig sein. Kurz alles was Materie besitzt (Ruhemasse  $> 0$ ), wird in der klassischen Mechanik als Körper bezeichnet.

wobei  $g$  die Erdbeschleunigung angibt, also  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Daher erhalten wir die Gewichtskraft

$$F_G = 0,1 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 0,981 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \approx 1 \text{ N}$$

Zum Merken:

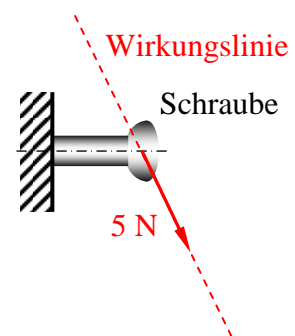
*Gewichtskraft einer Tafel Schokolade  $\approx 1$  Newton*



### Darstellung von Kräften

Kräfte sind vektorielle Größen, d.h. sie besitzen eine Richtungseigenschaft im Gegensatz zu so genannten skalaren Größen wie z.B. der Masse oder der Temperatur. Ihre Darstellung in Skizzen erfolgt mit *Pfeilen*. Eine vollständige Angabe enthält:

- den *Betrag* der Kraft entweder als Variable, z.B.  $F$ , oder als Wert mit Einheit, z.B. 5 N,
- die *Richtung*, gegeben durch die Pfeilrichtung (Wirkungslinie),
- den *Richtungssinn*, gekennzeichnet durch die Lage der Pfeilspitze.

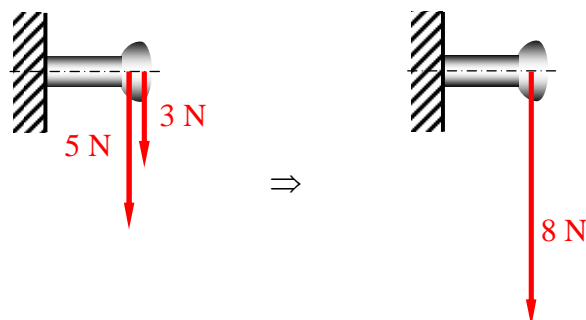


Bei starren Körpern gilt: Kräfte dürfen längs ihrer Wirkungslinie verschoben werden. Bei elastischen Körpern ist zusätzlich die Angabe des *Angriffspunkts* von Bedeutung. Dieser liegt gewöhnlich bei Zugkräften am Fußpunkt und bei Druckkräften an der Spitze des Pfeils.

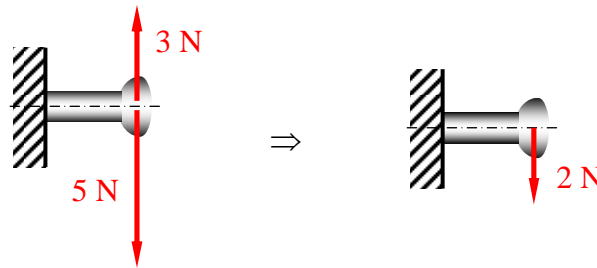
### Zusammenfassen von Kräften

Zwei Kräfte, die in einem gemeinsamen Punkt an einem starren Körper angreifen, können in folgender Weise zu einer „resultierenden“ Kraft addiert werden:

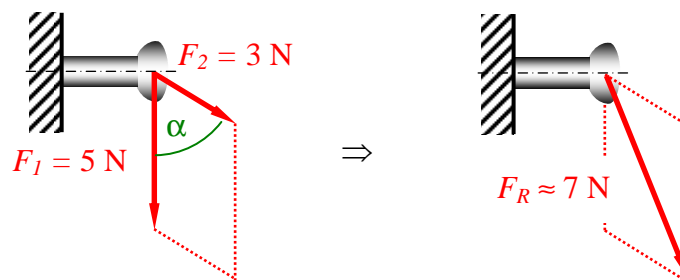
1. Kräfte mit gleicher Wirkungslinie und Orientierung werden zu einer resultierenden Kraft zusammengefasst indem ihre Beträge addiert werden. Wirkungslinie und Orientierung wird übernommen.



2. Zwei Kräfte mit gleicher Wirkungslinie und entgegengesetzter Orientierung werden zu einer resultierenden Kraft zusammengefasst indem ihre Beträge subtrahiert werden.



3. Zwei Kräfte mit unterschiedlichen Richtungen werden durch Vektoraddition (Kräfteparallelogramm) zu einer resultierenden Kraft zusammengefasst.



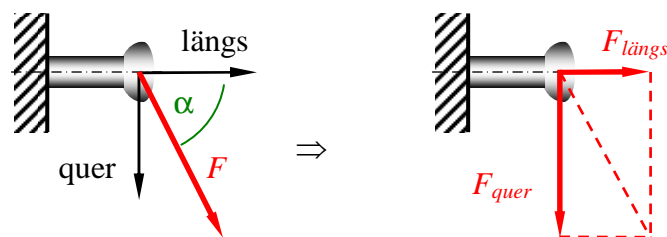
Der Betrag der resultierenden Kraft  $F_R$  kann zeichnerisch oder mit Hilfe trigonometrischer Beziehungen ermittelt werden. Mit dem Winkel  $\alpha$  zwischen den Kräften  $F_1$  und  $F_2$  gilt:

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}$$

In unserem Beispiel liegt der Winkel  $\alpha$  zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$ . Der Betrag der Resultierenden muss größer als die größere der beiden Kräfte und kleiner als die Summe der Beträge sein ( $5 \text{ N} < F_R \leq 8 \text{ N}$ ).

### Zerlegung einer Kraft

Eine Kraft kann auch umgekehrt zum letzten Fall in zwei vorgegebene Richtungen zerlegt werden. Man erhält eine gleichwertige Darstellung mit zwei Kräften, den so genannten „Komponenten“.



In unserem Beispiel wird die Kraft  $F$  in eine Komponente quer und eine längs zur Schraubenachse zerlegt. Auch hier können die Beträge der Komponenten zeichnerisch oder mit Hilfe

trigonometrischer Beziehungen ermittelt werden. Mit dem Winkel  $\alpha$  zwischen der Kraft  $F$  und der Längs-Richtung gilt:

$$F_{\text{längs}} = F \cos \alpha \quad \text{und} \quad F_{\text{quer}} = F \sin \alpha.$$

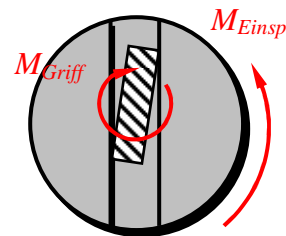
Oft interessiert man sich nur für eine der beiden Komponenten. Man fragt, welcher Anteil einer gegebenen Kraft in eine bestimmte Richtung wirkt. In unserem Beispiel könnte man sich fragen, welcher Anteil von  $F$  die Schraube auf Zug beansprucht.

Die Zerlegung muss nicht notwendigerweise in zueinander senkrechte Richtungen erfolgen.

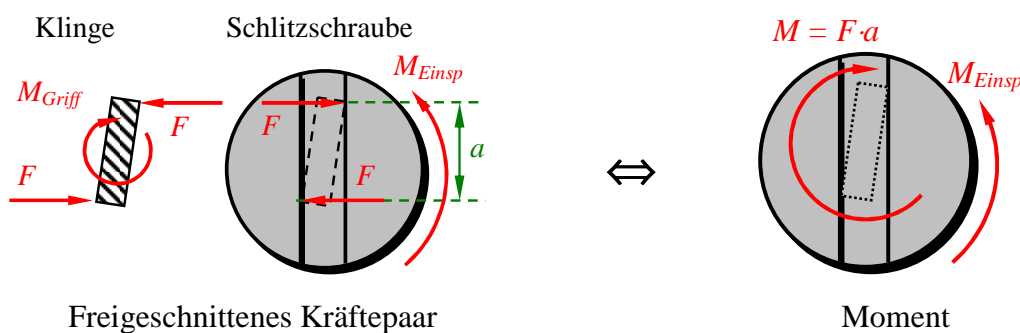
### 3.2 Das Moment

Wir betrachten folgendes einführendes Beispiel. Das Bild zeigt den Kopf einer Schlitzschraube von oben. Mit einem Schraubenzieher wird versucht die festsitzende Schraube zu drehen. Auf die Klinge wirkt noch ein Moment  $M_{\text{Griff}}$  vom Griff des Schraubenziehers und auf die festsitzende Schraube wirkt ein gleichgroßes Reaktionsmoment  $M_{\text{Einsp}} = M_{\text{Griff}}$  aus der Einspannung.

Schlitzschraube mit Schraubenzieherklinge (belastet)



Die Klinge des Schraubenziehers wird gedanklich herausgeschnitten. Es erscheinen die Druckkräfte  $F$  als Wirkung vom Schraubenkopf auf die Klinge (links) und von der Klinge auf den Schraubenkopf (rechts). Die beiden Kräfte  $F$  sind entgegengesetzt gleich groß und ihre parallelen Wirkungslinien weisen den Abstand  $a$  auf. Zusammen bilden sie ein so genanntes **Kräftepaar** ( $F, a$ ).



Die Wirkung eines Kräftepaars kann nicht mit einer resultierenden Kraft (diese ist nämlich Null) allein zusammengefasst werden. Stattdessen beschreibt man es kurz mit dem Begriff **Moment**. Das Moment  $M = F \cdot a$  ist äquivalent zum Kräftepaar ( $F, a$ ).

Analog zur Kraft gilt für das Moment:

Zum Merken:

*Ein Moment ist die Ursache für eine Dreh-Beschleunigung (Bewegungsänderung) oder eine (Dreh-) Verformung (Torsion, Biegung) eines Körpers.*

Zum Denken:

*Moment gleich „Drehkraft“*

Die Einheit des Momentes ist daher *Newton-Meter*:

$$1 \text{ Nm} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2.$$

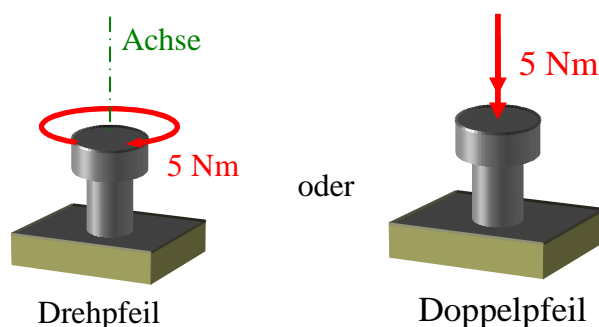
*Beispiel „Anzugsdrehmoment einer Knochenschraube“*

Das Anzugsdrehmoment einer 4,5-mm-Knochenschraube liegt bei etwa 5 Nm. Dieses Moment kann man z.B. aufbringen wenn man an einem Hebel (Schraubenschlüssel) von 10 cm Länge eine Kraft von 50 N (Gewichtskraft von ca. 5 kg) anbringt.

### Darstellung von Momenten

Momente sind wie die Kräfte *vektorielle Größen*. Die Richtung des Moments ist hier die Achse, um die das Moment wirkt. Also die Achse, um die ein Moment versucht, einen Körper zu drehen. Die Darstellung in einer Skizze erfolgt mit *Drehpfeilen* oder *Doppelpfeilen*. Auch hier müssen drei Angaben enthalten sein:

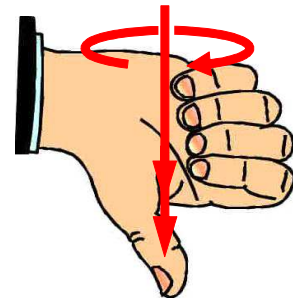
- der *Betrag* des Moments, entweder als Variable, z.B.  $M$ , oder als Wert mit Einheit, z.B. 5 Nm,
- die *Richtung*, gekennzeichnet durch die Achse oder die Wirkungslinie des Doppelpfeils,
- der *Richtungssinn* (Drehsinn), gekennzeichnet durch die Pfeilspitze oder die Doppelpfeilspitze.



Momente können auf einem starren Körper beliebig verschoben werden. Der Angriffspunkt ist nur bei elastischen Körpern von Interesse.

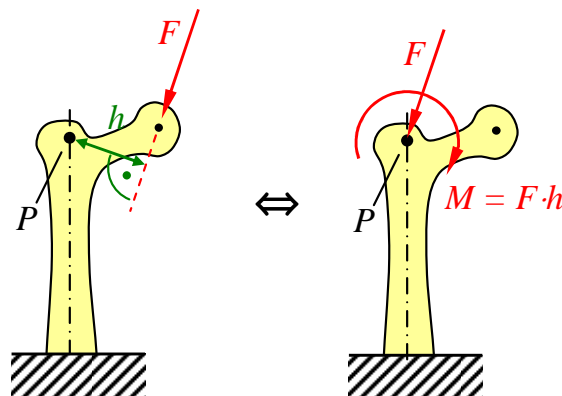
## Rechte-Hand-Regel

Die „Rechte-Hand-Regel“ dient zur Ermittlung des Drehsinns eines Moments, das durch einen Doppelpfeil dargestellt ist. Wenn der gestreckte Daumen in Richtung des Doppelpfeils zeigt, dann geben die übrigen gekrümmten Finger die Drehrichtung des Moments an.



## Moment einer Kraft bezüglich eines Punkts

Momentengleichgewichte werden immer bezüglich eines Punkts aufgestellt. Dieser Punkt kann beliebig auch außerhalb des Körpers gewählt werden.



Eine Kraft  $F$ , die an einem Körper angreift, besitzt bezüglich eines gewählten Punkts  $P$  ein Moment  $M$ . Der lotrechte Abstand zwischen dem Punkt und der Wirkungslinie der Kraft wird als Hebelarm  $h$  der Kraft bezeichnet. Es gilt:  $M = F \cdot h$ .

Zum Merken:

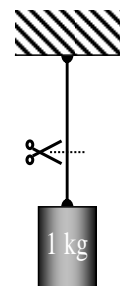
$$\text{Moment} = \text{Kraft} \cdot \text{Hebelarm} \quad \text{oder} \quad M = F \cdot h.$$

Eine Kraft kann so parallel zu ihrer Wirkungslinie verschoben werden. Damit sich die Gesamtwirkung auf den starren Körper nicht ändert, muss zusätzlich zur verschobenen Kraft  $F$  das *Versetzungsmoment*  $M = F \cdot h$  eingefügt werden.

## 3.3 Das Schnittprinzip von Euler

Kräfte und Momente treten nicht offen zu Tage. Sie sind immer Wechselwirkungen zwischen zwei Körpern oder zwischen zwei Teilen eines Körpers. Um sie für eine Rechnung zugänglich, also sichtbar zu machen führt man einen gedanklichen Schnitt durch und trennt die beiden Teilsysteme voneinander. An den Schnittpunkten müssen Schnittkräfte und -momente angetragen werden, um die Wechselwirkungen zwischen den Körpern äquivalent zu ersetzen.

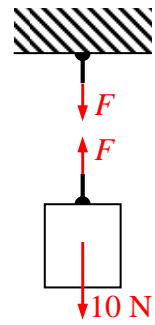
In diesem Beispiel muss am unteren Seilstumpf eine Kraft  $F$  nach oben ziehen,



damit das Gewicht nicht nach unten fällt. Diese Kraft, ersetzt die Wirkung vom oberen auf den unteren Teil des Seils.

Die Schnittkräfte an den beiden Schnittufern sind gleich groß und einander entgegengesetzt (Newtonsches Axiom: *actio = reactio*). Fügt man die Teile am Schnitt (gedanklich) wieder zusammen, so heben sich die Schnittkräfte der beiden Ufer gerade auf. Das Gesamtsystem, das beide Teile enthält, bleibt durch die Schnittkräfte unbeeinflusst.

Alle Kräfte und Momente können als *Schnittgrößen* interpretiert werden, auch Gewichts- und Trägheitskräfte, bei denen man sich vorstellen kann, dass die Masse aus den Körpern herausgeschnitten wurde und die Wirkung auf die masselose Struktur nun durch entsprechende Kräfte (in unserem Fall die Gewichtskraft von 10 N) ersetzt werden muss.



Zum Merken:

*Erst schneiden, dann Kräfte und Momente eintragen.*

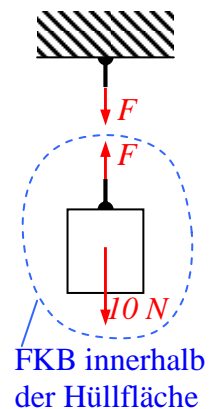
### 3.4 Freikörperbilder

Ein Freikörperbild (FKB, engl.: free body diagram) ist ein in der Skizze völlig freigeschnittenes Teilsystem, also ein Körper, Teil eines Körpers oder aber auch mehrere miteinander verbundene Körper.

Zum Merken:

*Freikörperbild = völlig frei geschnittenes Teilsystem*

Zur Kontrolle legt man eine geschlossene *Hüllfläche* (bei ebenen Problemen eine geschlossene Linie) um das zu betrachtende Teilsystem. Dies ist der sogenannte Bilanzraum. Überall wo die Hüllfläche irgendwelche Teile der Struktur durchläuft muss geschnitten werden, das bedeutet Schnittkräfte und -momente müssen eingetragen werden. Alle Kräfte und Momente von der Umgebung auf die Struktur im Inneren der Hüllfläche müssen berücksichtigt werden. Volumenkräfte wie Gewichtskräfte nicht vergessen!



Zum Merken:

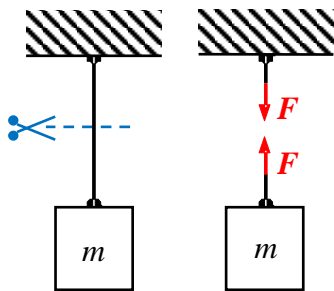
*Erst Freikörperbild, dann Gleichgewicht!*

### 3.5 Verschiedene Schnittkräfte und -momente

In diesem Abschnitt behandeln wir einige Beispiele, die das Prinzip des Schneidens erläutern sollen und einige der geläufigsten Fälle abdecken.

#### Beispiel 1: Seil

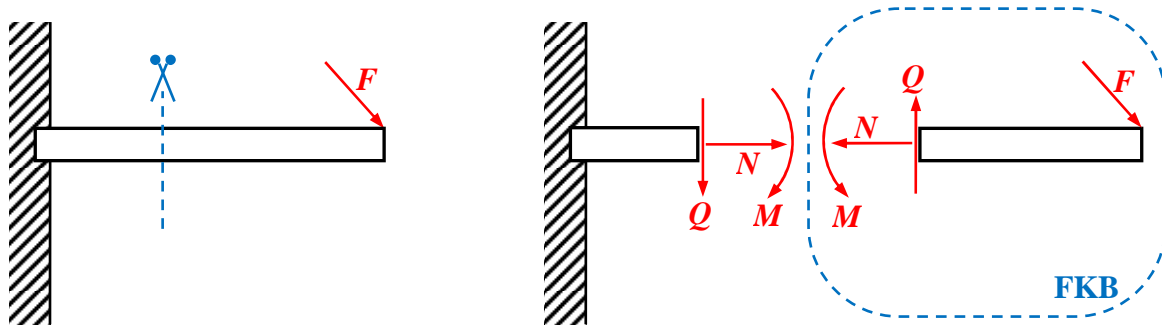
Zuerst betrachten wir nochmals das Seil, an dessen Ende ein Gewicht angehängt wurde, und schneiden es in der Mitte durch um zwei separate Teilsysteme zu erhalten. An beiden Seiten des zerschnittenen Seils wird je eine Schnittkraft  $F$  eingetragen. Diese sind jeweils Zugkräfte, da ein Seil nur solche übertragen kann. Sie ersetzen jeweils die Wirkung des einen geschnittenen Teilsystems auf das jeweils andere Teilsystem. Wichtig: wir haben hier noch kein vollständiges Freikörperbild erhalten. Das obere Teilsystem ist noch mit der Einspannung verbunden und müsste erst noch davon gelöst werden. Im unteren Teilsystem wurde die Masse noch nicht durch die entsprechende Gewichtskraft ersetzt.



#### Beispiel 2: Balken in 2D

Wir betrachten nun einen auf einer Seite fest eingespannten Balken. Schneiden wir diesen in der Mitte in zwei Teilsysteme, so treten folgende Kräfte und Momente auf:

- Normalkraft  $N$ ,
- Querkraft  $Q$ ,
- Biegemoment  $M$ .

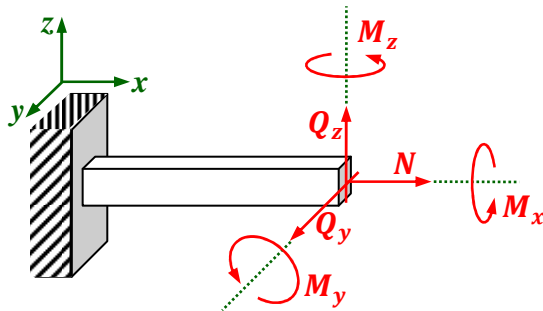


Diese zeigen in den verschiedenen Teilsystemen jeweils in die entgegengesetzte Richtung und sind vom Betrag jeweils identisch. Die senkrecht zur Fläche stehende Normalkraft kann wieder als Zug- bzw. Druckkraft interpretiert werden, die Querkraft als Scherkraft. Das Biegemoment  $M$  wird interpretiert als diejenige „Drehkraft“, die auf den Balken wirkt. Für  $F = 0$  und unter Vernachlässigung der Gewichtskraft würden sowohl Quer- als auch Normalkraft sowie Biegemoment verschwinden.



### Beispiel 3: Balken in 3D

Beim Schnitt durch einen Balken in 3d Es treten die folgenden Kräfte und Momente auf:

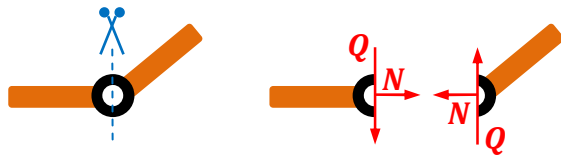


- Normalkraft  $N$ ,
- Querkräfte  $Q_i$  in  $i$ -Richtung,  $i \in \{y, z\}$ ,
- Biegemoment  $M_y$  um  $y$ -Achse,
- Biegemoment  $M_z$  um  $z$ -Achse,
- Torsionsmoment  $M_x$  um  $x$ -Achse.

Im Bild ist hier nur die linke Seite des geschnittenen Balkens zu sehen.

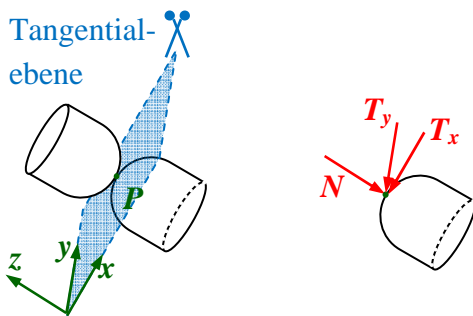
### Beispiel 4: (Scharnier-) Gelenke in 2D

Bei einem reibungsfreien Gelenk taucht beim Schneiden kein Moment  $M$  auf, bzw. es gilt  $M = 0$ . Dies lässt sich dadurch erklären, dass beim Auftreten einer Kraft, die das Gelenk in Bewegung setzen würde, keine Kraft entgegenwirkt.



### Beispiel 5: Punktkontakt in 3D

Wir betrachten nun zwei Teilsysteme, die sich an einem einzelnen Punkt  $P$  berühren und an diesem aneinander haften. Beim Schneiden entlang der Tangentialebene wird die Kontaktkraft freigeschnitten. Diese besteht aus drei Komponenten,

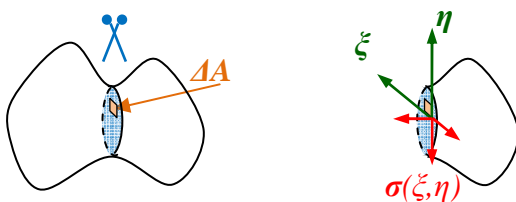


- der Normalkraft  $N$
- und den Tangentialkräften  $T_i$ ,  $i \in \{x, y\}$ .

Es entstehen keine Momente.

### Beispiel 6: Schnitt durch beliebigen Körper in 3D

Wir betrachten einen beliebigen Körper und schneiden durch eine beliebige Fläche und definieren auf dieser ein Koordinatensystem. Im Prinzip wirken an jedem Punkt  $(\xi, \eta)$  der Schnittfläche drei Kräfte. Betrachten wir jedoch zunächst die Teilfläche  $\Delta A$ . Auf dieser wirkt also eine Kraft  $\Delta \vec{F} = (\Delta N, \Delta T_\xi, \Delta T_\eta)^T$ . Berechnen wir nun den Grenzwert für  $\Delta A \rightarrow 0$  erhalten wir quasi eine Art Kraft  $\sigma$  an einem einzel-



nen Punkt der Fläche bzw. eine über die gesamte Fläche „verschmierte“ Schnittkraft. Dies führt direkt zur Definition der Spannung:

$$\vec{\sigma}(\xi, \eta) := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}.$$

Mehr dazu im nächsten Kapitel.

## 3.6 Freiheitsgrade und Bindungen

### 3.6.1 Freiheitsgrade

Freiheitsgrade (engl.: Degrees of Freedom, DOF) sind diejenigen linear unabhängigen Koordinaten, die ein System vollständig beschreiben. In der (nicht elastischen) Statik betrachten wir starre Körper bzw. Systeme starrer Körper. Das heißt, die Freiheitsgrade sind genau die Parameter, die beschreiben, wie die Körper im Raum liegen bzw. welche Bewegungsarten möglich sind. Die folgende Tabelle gibt eine kurze Übersicht über Anzahl  $f$  und Art der Freiheitsgrade (Bewegungsarten) für verschiedene Körper in unterschiedlichen Dimensionen.

| <i>Objekt</i>           | <i>Freiheitsgrade <math>f</math></i> | <i>Bewegungsarten</i>       |
|-------------------------|--------------------------------------|-----------------------------|
| Punktmasse in 2D        | 2                                    | 2 Translationen             |
| Punktmasse in 3D        | 3                                    | 3 Translationen             |
| Starrer Körper in 2D    | 3                                    | 2 Translationen, 1 Rotation |
| Starrer Körper in 3D    | 6                                    | 3 Translationen, 3 Rotation |
| $n$ starre Körper in 2D | $3n$                                 | ...                         |
| $n$ starre Körper in 3D | $6n$                                 | ...                         |

### 3.6.2 Verschiedene Bindungen und Auflager

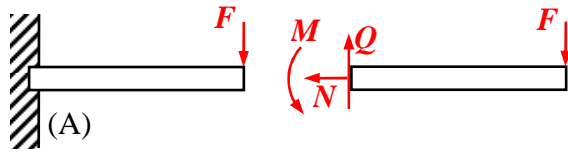
Meist liegen die Körper eines Systems nicht willkürlich verteilt im Raum sondern sind ganz oder teilweise fixiert. Diese Fixierungen nennt man Bindungen (engl.: constraints). In diesem Abschnitt werden wir einige dieser Bindungen vorstellen.

Eine Bindung heißt  $b$ -wertig, wenn sie den Wert von  $b$  Freiheitsgraden eindeutig bestimmt. Es gilt also für Systeme von  $n$  starren Körpern und insgesamt  $b$ -wertigen Bindungen:

$$\begin{aligned} f &= 3n - b && \text{in 2D,} \\ f &= 6n - b && \text{in 3D.} \end{aligned}$$

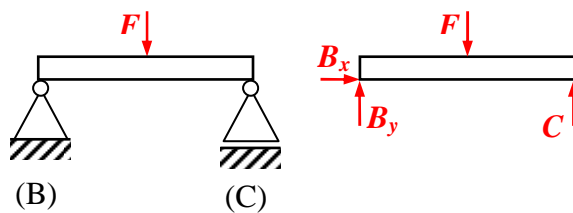
## Beispiele

(A) *Feste Einspannung*: In Beispiel (A) betrachten wir eine *feste Einspannung* eines 2d-



Balkens in der Wand. Durch diese Bindung ist die Position und Ausrichtung des Balkens an der linken Seite eindeutig bestimmt, das heißt die Bindung ist 3-wertig. Dies kommt auch im dazugehörigen FKB zum Ausdruck, da hier drei zusätzliche Kräfte bzw. Momente eingefügt werden.

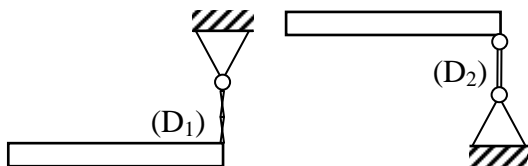
(B) *Festes drehbares Lager*: Die Bindung (B) dagegen, hält lediglich die Position des 2d-



Balkens an der linken Seite fest, der Balken bleibt aber drehbar. Das heißt nur die beiden möglichen Translationen werden blockiert. Die Bindung ist also 2-wertig. Dies spiegelt sich im FKB wider, da hier kein Drehmoment eingetragen werden muss.

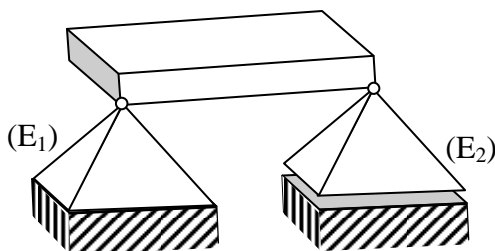
(C) *Verschiebbares drehbares Lager*: Bindung (C) ist lediglich 1-wertig. Sie hält die Position des Balkens in vertikaler Richtung fest, erlaubt allerdings das Verschieben in horizontaler Richtung sowie Drehungen.

(D) *Seil/Pendelstütze*: Sowohl Seil ( $D_1$ ) als auch Pendelstütze ( $D_2$ ) sind 1-wertige Bindungen.



Beide verhindern lediglich Translationen in „Seil-“ bzw. „Pendel-Richtung“. Obwohl ein Seil nur Zugkräfte und die Pendelstütze sowohl Zug- als auch Druckkräfte übertragen kann, machen wir in der Regel keinen Unterschied zwischen diesen beiden Bindungen.

(E) *Lager in 3d*: Zum Schluss betrachten wir noch die Lager (B) und (C) im dreidimensionalen.



Analog verhindert Lager ( $E_1$ ) keine Drehungen, also sind alle drei Rotationen möglich. Desweiteren ist die Position fix, also sind keine Translationen möglich. Das Lager ist also 3-wertig.

Lager ( $E_2$ ) blockiert Translationen in vertikaler Richtung, lässt jedoch alle Rotationen und Verschiebungen in der horizontalen Ebene zu.

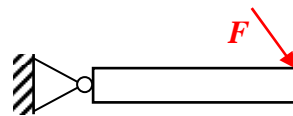
### 3.6.3 Statische Bestimmtheit

Betrachten wir nun erneut die Anzahl der Freiheitsgrade  $f = 6n - b$  in 3d bzw.  $f = 3n - b$  in 2d. Unter statischer Bestimmtheit versteht man die unterschiedlichen Werte für  $f$ . Wir unterscheiden drei Fälle:

#### 1. Fall: $f > 0$ : Statisch unbestimmtes System

Ein System heißt statisch unbestimmt, falls gilt, dass die Anzahl der Freiheitsgrade  $f > 0$  positiv sind. Damit lässt sich also die genaue Lage des Systems aktuell nicht beschreiben.

Körper  $n = 1$   
Bindungen  $b = 2$   
Freiheitsgrade  $f = 1$

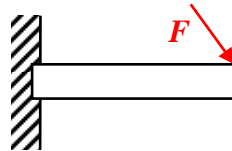


Ausweg: In der Dynamik werden zusätzliche Gleichungen eingeführt. So kann man Beschleunigungen (Bewegung) berechnen. Siehe „MMSM II Dynamik“.

#### 2. Fall: $f = 0$ : Statisch bestimmtes System

Ein System heißt statisch bestimmt, falls gilt, dass die Anzahl der Freiheitsgrade  $f = 0$  gleich null sind. Damit lässt sich also die genaue Lage des Systems genau beschreiben. Es gilt also

Körper  $n = 1$   
Bindungen  $b = 3$   
Freiheitsgrade  $f = 3$

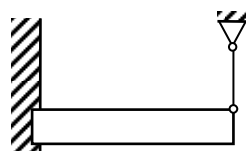


in der Regel, dass die Anzahl der linear unabhängigen Gleichungen genau der Anzahl der Unbekannten entspricht, also  $6n$  in 3d bzw.  $3n$  in 2d.

#### 3. Fall: $f < 0$ bzw. redundante Bedingungen: Statisch überbestimmtes System

Ein System heißt statisch überbestimmt, falls es mehr Gleichungen als Unbekannte gibt. Dies kann bedeuten, dass die Gleichungen widersprüchlich sind, es also keine statische Lösung für

Körper  $n = 1$   
Bindungen  $b = 4$   
Freiheitsgrade  $f = -1$ ?



die Lage des Systems existiert. Ausweg: In der Elastostatik werden auch Verformungen berücksichtigt. Im Fall redundanter Bedingungen, d.h. falls mehrere Bedingungen zu denselben

Resultaten führen und sich nicht widersprechen, also linear abhängig sind, kann man trotzdem ein statisch bestimmtes System erhalten.

## 3.7 Statisches Gleichgewicht

Für einen Körper, der in Ruhe ist oder zumindest seinen Bewegungszustand nicht ändert, gilt, dass alle an ihm angreifenden Kräfte und Momente im Gleichgewicht miteinander sind. Diese Gleichgewichtsbedingung ist das wichtigste Werkzeug der Statik. Aus ihr können mathematische Gleichungen z.B. für noch unbekannte Kräfte gewonnen werden.

Im drei-dimensionalen Raum können an einem Freikörperbild sechs (skalare, linear unabhängige) Gleichungen aufgestellt werden. Bezüglich eines beliebigen zuvor gewählten Koordinata-

tensystems  $(x, y, z)$  und eines beliebigen Punkts  $P$  können z.B. folgende Gleichungen aufgestellt werden:

Drei Kräftegleichgewichte

$$\text{Summe aller Kräfte in x-Richtung gleich Null: } F_{1,x} + F_{2,x} + \dots = 0$$

$$\text{Summe aller Kräfte in y-Richtung gleich Null: } F_{1,y} + F_{2,y} + \dots = 0$$

$$\text{Summe aller Kräfte in z-Richtung gleich Null: } F_{1,z} + F_{2,z} + \dots = 0$$

und drei Momentengleichgewichte

$$\text{Momente um x-Achse bezüglich P gleich Null: } M_{1,x}^P + M_{2,x}^P + \dots = 0$$

$$\text{Momente um y-Achse bezüglich P gleich Null: } M_{1,y}^P + M_{2,y}^P + \dots = 0$$

$$\text{Momente um z-Achse bezüglich P gleich Null: } M_{1,z}^P + M_{2,z}^P + \dots = 0$$

Die Kräftegleichgewichte können ganz oder teilweise durch Momentengleichgewichte bezüglich eines anderen oder mehrerer anderer Punkte ersetzt werden. Es dürfen maximal drei Momentengleichgewichte um parallele Achsen gebildet werden. Diese dürfen zudem nicht in einer Ebene liegen. Die Achsen müssen nicht notwendig durch den Körper laufen. So können Kräftegleichgewichte auch als Sonderfall von Momentengleichgewichten mit unendlich weit entfernten Bezugsachsen interpretiert werden.

*Im zwei-dimensionalen Raum* können für ein Freikörperbild höchstens drei (skalare, linear unabhängige) Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden. Dies sind zum Beispiel zwei Kräftegleichgewichte und ein Momentengleichgewicht:

$$\text{Summe aller Kräfte in x-Richtung gleich Null: } F_{1,x} + F_{2,x} + \dots = 0$$

$$\text{Summe aller Kräfte in y-Richtung gleich Null: } F_{1,y} + F_{2,y} + \dots = 0$$

$$\text{Summe aller Momente bezüglich P gleich Null: } M_{1,z}^P + M_{2,z}^P + \dots = 0$$

Damit können bis zu drei Unbekannte (Kräfte oder Momente) berechnet werden. Auch hier können die zwei Kräftegleichgewichte durch Momentengleichgewichte bezüglich anderer Punkte ersetzt werden. Bei drei Momentengleichgewichten dürfen die drei Bezugspunkte nicht auf einer Geraden liegen.

### 3.8 Rezept zum Lösen von Aufgaben aus der Statik

Das folgende Schema dient zum Lösen von Aufgaben aus der Statik, bei der ein System mit Last- und Lagerungsfall gegeben ist und z.B. Schnittkräfte gesucht sind.

**Schritt 1: Modellbildung.**

Generieren eines Ersatzmodells (Skizze mit Geometrie, Lasten, Einspannungen). Weglassen unwichtiger Dinge. Das "reale System" muss abstrahiert werden.

**Schritt 2: Koordinaten.**

Koordinaten (Wege, Winkel) einführen. Ausgelenktes System hinzeichnen und Auslenkungen gegenüber Referenzlage beschreiben.

**Schritt 3: Schneiden, Freikörperbilder.**

System aufschneiden, Schnittkräfte und -momente eintragen. Freikörperbilder erzeugen.

**Schritt 4: Gleichgewicht.**

Kräfte- und Momentengleichgewichte (nur für echte Freikörperbilder) anschreiben und daraus (Differential-)Gleichungen bestimmen.

**Schritt 5: Gleichungen lösen.**

Man kann höchstens so viele Unbekannte berechnen, wie man Gleichungen hat.

**Schritt 6: Auswerten, Verifizieren, Validieren**

Auswerten: Ergebnisse prüfen, deuten, darstellen.

Verifizieren: Mathematisch korrekt? Plausibilität, Konvergenz, ... prüfen.

Validieren: Annahmen gültig? Mit Experimenten vergleichen.

Dieses Rezept kann mit geringfügigen Änderungen auch auf Probleme außerhalb der Statik angewandt werden.

Die Schritte 1 und 6 erfordern besondere Aufmerksamkeit. Hier kommt es auf Grundlagenwissen, Erfahrung und Kommunikation mit dem Fragesteller an. Im Gegensatz zu den anderen Schritten können diese kaum vom Computer ersetzt werden.

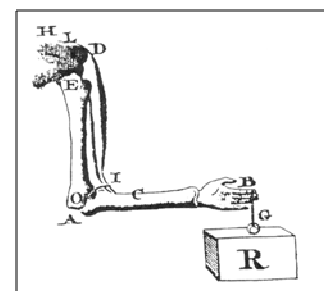
**3.8.1 Rechenbeispiel „Bizepskraft“**

An einem klassischen Rechenbeispiel sollen die Lösungsschritte verdeutlicht werden. Wir beschränken uns auf ein ebenes (zweidimensionales) Problem.

*Gegeben:* Ein Mensch hält mit der Hand ein Gewicht von 10 kg bei gebeugtem Arm mit horizontalem Unterarm.

*Gesucht:* Die Muskelkraft im Bizeps (*musculus biceps brachii*) unter der Annahme, dass nur dieser angespannt sei.

*Lösung:* Wir gehen nach unserem „Rezept“ vor. Bei der Anzahl und Auswahl der Schnitte und Gleichgewichte wählen wir bewusst keine optimale Lösung, um zu zeigen, wie man auch ohne „geniale Einfälle“ zum Ziel kommt.



ALFONSO BORELLI  
(1608-1679)

### Schritt 1: Modellbildung

Gesucht ist ein *Ersatzmodell*, so einfach wie möglich, so kompliziert wie nötig, das es uns erlaubt die Muskelkraft zu berechnen. Unwichtige Einflüsse (das sind unendlich viele) müssen weggelassen werden.

Bild 1: „Reales“ System. Eigentlich ein Abbild (Foto) eines realen Systems und damit auch nur ein Modell.

Aufgetragen: Biomechanisches Ersatzmodell mit Elementen des Bewegungsapparats (Knochen, Gelenke, Muskeln) in anatomischer Form.

Bild 2: Mechanisches Ersatzmodell mit idealisierten mechanischen Elementen (Balken, Seile, Gelenke, ...).

Im mechanischen Modell werden einige Vereinfachungen angenommen: So wird z. B. das Schultergelenk als feste Einspannung betrachtet. Der angespannte Bizeps sei undeformierbar, die Masse des Arms sei im Vergleich zum Gewicht vernachlässigbar, das Gelenk im Ellenbogen wird sei reibungsfrei.

### Schritt 2: Koordinaten: x- und y-Achse

### Schritt 3: Aufschneiden, Freikörperbilder

Um Rechnen zu können muss das System aufgeschnitten werden. Schnittgrößen müssen eingetragen werden. Mindestens an den Stellen, an denen eine Kraft (oder ein Moment) gesucht ist, muss man schneiden. Wir führen zunächst drei Schnitte in den Seilen durch.

An beiden Seiten der drei Schnitte wird je eine Schnittkraft eingetragen. Es sind Zugkräfte, da ein Seil nur solche übertragen kann.

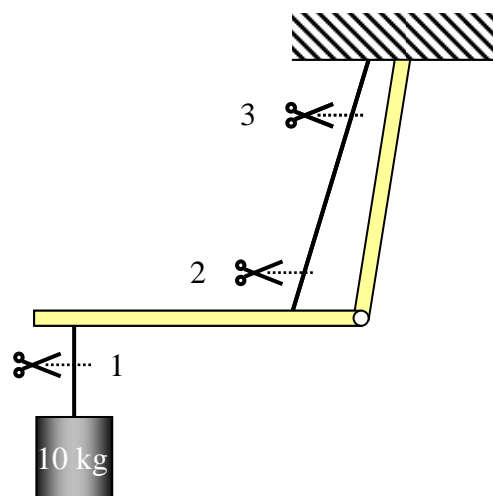
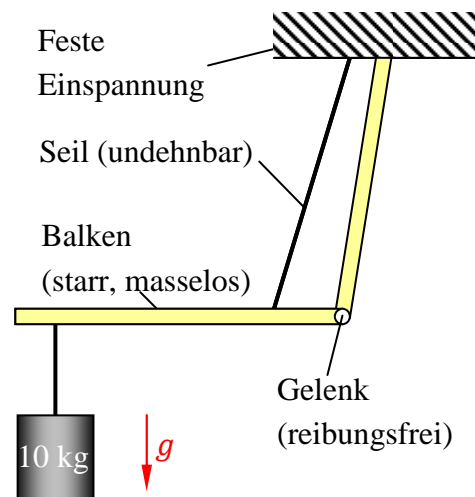


Bild 3: Schneiden

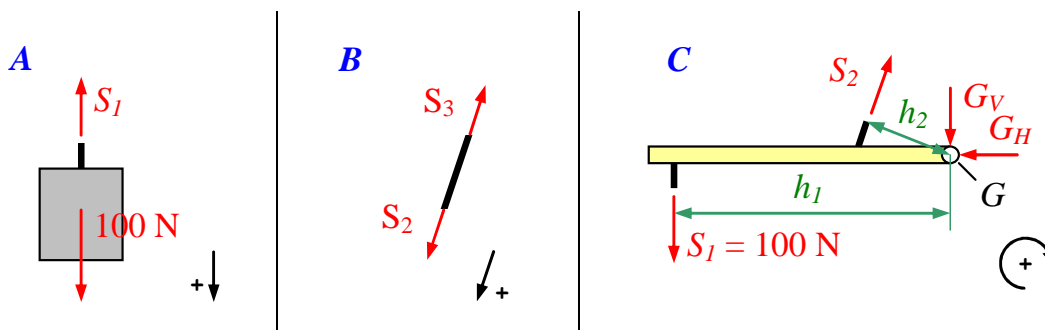
Die Wirkung der Erde auf die Masse  $m = 10 \text{ kg}$  wird durch die Gewichtskraft  $G = m \cdot g \approx 100 \text{ N}$  ersetzt.

Die Hüllflächen  $A$  und  $B$  können geschlossen werden, ohne irgendwo Teile des Systems zu durchlaufen. Innerhalb dieser Hüllflächen befinden sich vollkommen freigeschnittene Teilsysteme, also *Freikörper*. Für diese Teilsysteme können wir Gleichgewichtsbedingungen anschreiben. Diese führen jedoch zunächst nicht zum Ziel (siehe unten).

Schnitt 4 liefert dann ein weiteres Freikörperbild  $C$ . Beim Schnitt durch das ideale Gelenk müssen zwei Schnittkräfte (ebenes Problem) mit unterschiedlicher Richtung eingetragen werden, z.B. die Vertikal-Komponente  $G_V$  und die Horizontal-Komponente  $G_H$  der Gelenkkraft.

Ein Moment muss beim Schnitt durch ein reibungsfreies Gelenk nicht eingetragen werden. Bei einem Schnitt durch den Balken wäre zusätzlich zu den Kräften auch ein Biegemoment einzutragen gewesen.

*Freikörperbilder:*



#### Schritt 4 und 5: Gleichgewicht und Gleichungen lösen

Wir schreiben die Kräfte- und Momentengleichgewichte für die drei Freikörper an und lösen die Gleichungen nach den Unbekannten auf.

**A:** Summe aller Kräfte in vertikaler Richtung = 0

$$100 \text{ N} + (-S_1) = 0 \Rightarrow S_1 = 100 \text{ N}.$$

Das Ergebnis erscheint trivial: an der Hand zieht eine Kraft von 100 N.

**B:** Summe aller Kräfte in Seil-Richtung = 0

$$S_2 + (-S_3) = 0 \Rightarrow S_3 = S_2.$$

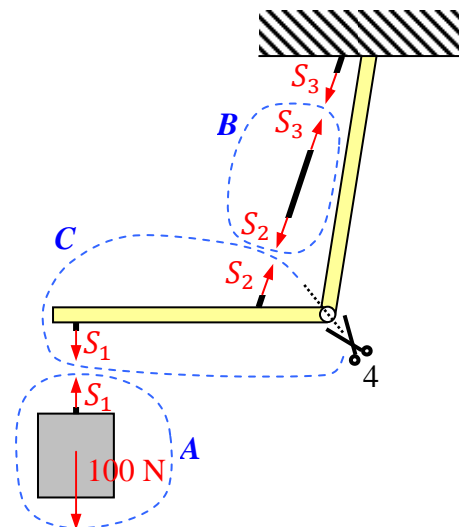


Bild 5: Schnittgrößen und Hüllflächen



Hier kommen wir zunächst nicht weiter. Aber man erkennt: überall im Seil (Muskel) herrscht die gleiche Kraft.

**C:** Summe aller Momente bzgl. Punkt  $G = 0$

$$\begin{aligned} -S_1 \cdot h_1 + S_2 \cdot h_2 &= 0 \\ -100 \text{ N} \cdot 0,35 \text{ m} + S_2 \cdot 0,05 \text{ m} &= 0 \\ \Rightarrow S_2 &= 100 \text{ N} \cdot \frac{0,35 \text{ m}}{0,05 \text{ m}} = 700 \text{ N} \end{aligned}$$

Das Momentengleichgewicht wird um den Gelenkpunkt  $G$  aufgestellt. Der Vorteil ist, dass die neuen, unbekanntenen Gelenkkräfte im Momentengleichgewicht keine Rolle spielen. Der Hebelarm  $h_2$  muss senkrecht (!) zur Kraft  $S_2$  gemessen werden. Wir erhalten die Muskelkraft  $S_2 = 700 \text{ N}$ .

### Schritt 6: Lösung deuten

Die Muskelkraft von 700 N erscheint sehr hoch. Sie liegt (in unserem Beispiel) um den Faktor 7 über der eigentlichen Last. Das Ergebnis ist jedoch plausibel. Die Hebelarme für die Muskulatur des Bewegungsapparates sind oft sehr viel kleiner als die der angreifenden Lasten. Auf der anderen Seite sind dagegen die Wege und Geschwindigkeiten der Hand um den gleichen Faktor größer als die des Muskels. Außerdem sind unsere Extremitäten dadurch schlank und beweglich.

## 3.9 Mittelpunkte

Es gibt verschiedene Arten von Mittelpunkten, z.B. verschiedene geometrische Mittelpunkte (wie Flächenmittelpunkte etc.), Schwerpunkt, Massenmittelpunkt, Trägheitsmittelpunkt, Betätigungsmittelpunkt, Auftriebszentrum ...

Wir behandeln hier nur ein paar Beispiele von Mittelpunkten.

### Der Massenmittelpunkt

Sei  $r_x$  die  $x$ -Koordinate der „Kontrollmasse“  $dm$ , dann gilt für die  $x$ -Koordinate  $x_M$  des Massenmittelpunktes

$$x_M := \frac{\int_{\text{Masse}} r_x dm}{\int_{\text{Masse}} dm}$$

### Schwerpunkt

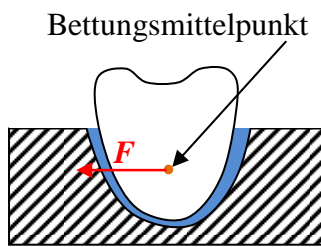
Sei  $g$  die Fallbeschleunigung. Mit den gleichen Definitionen wie gerade gilt für die  $x$ -Koordinate  $x_S$  des Schwerpunktes

$$x_S := \frac{\int_{\text{Masse}} g \cdot r_x dm}{\int_{\text{Masse}} g dm}$$

Falls  $g$  konstant folgt  $x_M = x_S$ .

### Bettungsmittelpunkt

Wir betrachten einen starren Körper, der in einem elastischen Material eingebettet ist. Für eine gegebene Kraft  $F$  ist der Bettungsmittelpunkt als derjenige Punkt am Körper definiert, sodass die Kraft auf diesen Punkt angewendet eine reine Translation in Krafrichtung bewirkt.



Im Beispiel ist ein Zahn abgebildet, der in Periodontal-Ligament (PDL) eingebettet ist. Wirkt die Kraft  $F$  auf den Bettungsmittelpunkt, so verschiebt sich der Zahn genau in horizontaler Richtung. Würde die Kraft zum Beispiel an eine Stelle weiter oben wirken, so würde zusätzlich eine Rotation gegen den Uhrzeigersinn entstehen.

## 4 Elastostatik / Festigkeitslehre

In der Elastostatik wird die Idealisierung der starren Körper aufgegeben. An ihre Stelle tritt eine erweiterte Idealisierung, das Modell vom elastisch (= reversibel) verformbaren Körper aus homogenem (= gleichmäßig verteiltem) Werkstoff.

Neben der so genannten *Belastung*, das sind die äußeren, aufgeprägten Kräfte und Momente, werden nun auch die so genannten *Beanspruchungen* der Körper, das sind die „inneren“ Spannungen und Verzerrungen, untersucht.

Typische Fragen der Festigkeitslehre sind:

- Wann bricht es und wo beginnt es zu brechen?
- Wie groß sind die Verformungen?

### 4.1 Die Spannung

Aus der Erfahrung wissen wir:

- Ob ein Seil reißt oder nicht hängt von der Last, vom Material und von der Dicke des Seils ab.
- Empfindliche Fußböden leiden unter Pflennigabsätzen, auch wenn die Person nicht sehr schwer ist.



Die äußere *Belastung*, die ein Körper erfährt, sagt noch nichts über seine innere *Beanspruchung* aus. Um zu beurteilen, wie stark das Material beansprucht wird, ob es hält oder nicht, muss auch die Fläche berücksichtigt werden, über die eine Kraft übertragen wird. Diese, auf die Fläche bezogene Kraft, ist die *Spannung*.

Wie bei den Kräften müssen wir schneiden, um die Spannungen „sichtbar“ zu machen. Eine einzelne Schnittkraft würde dann nur in einem Punkt der Schnittfläche angreifen (siehe auch: Abschnitt 3.5, Beispiel 6). Um diese grobe Vereinfachung zu verbessern, kann man Teilkräfte an unterschiedlichen Punkten auf der Schnittfläche verteilen. Im Grenzübergang gegen unendlich viele Teilkräfte „verschmiert“ man gedanklich die Kraft über die gesamte Fläche und erhält eine *Spannung*. Auch dabei gilt „*actio = reactio*“, d.h. die Spannungen an einander zugeordneten Stellen der beiden Schnittufer sind entgegengesetzt und gleich groß.

Zum Merken:

$$\text{Spannung} = \text{„verschmierte“ Schnittkraft,}$$

$$\text{Spannung} = \text{Kraft pro Fläche oder } \sigma = F/A.$$

Spannungen sind wie die Kräfte, von denen sie abgeleitet werden, *vektorielle Größen*. Sie besitzen eine Richtungseigenschaft und werden mit Pfeilen dargestellt.

## Einheit der Spannung

Die Einheit der Spannung ist *Pascal* (Pa):

$$1 \text{ Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pascal.}$$

Häufiger verwendet wird allerdings die Einheit Mega-Pascal ( $1 \text{ MPa} = 1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ ):

$$1 \text{ MPa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 1 \text{ Mega-Pascal.}$$

## Beispiel: Die Zugspannung in einem Muskel

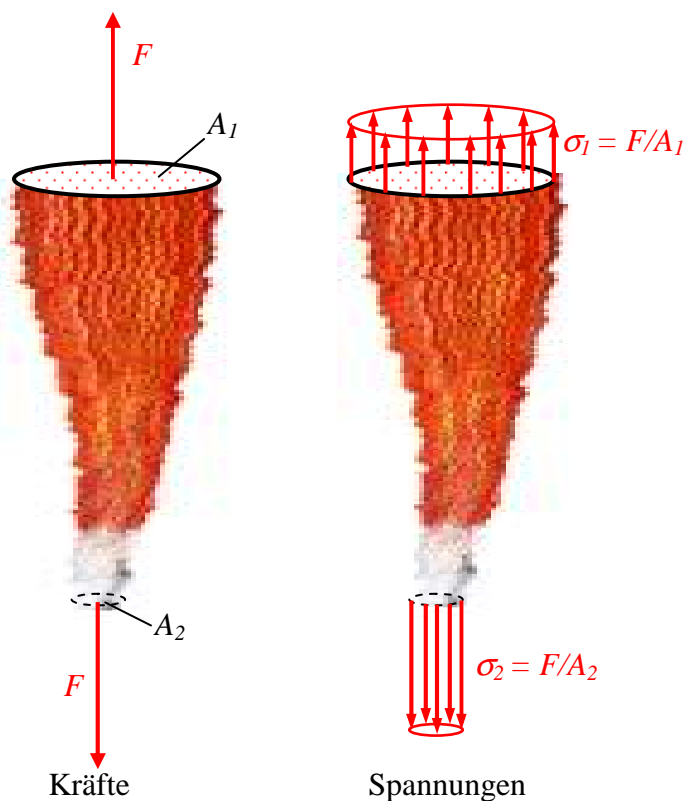
Betrachten wir den Muskel aus dem Rechenbeispiel 3.8.1 etwas genauer. An beiden Schnitten hatten wir gleichgroße Muskel-Zugkräfte  $F$  ermittelt. Wir nehmen nun an, dass der obere Schnitt durch den Muskelbauch mit der Querschnittsfläche  $A_1$  und der untere Schnitt durch den Muskelansatz mit der Querschnittsfläche  $A_2$  laufen. Wenn wir weiter annehmen, dass die Spannungen innerhalb der einzelnen Querschnittsflächen konstant sind, dann lassen sich die Spannungen einfach als Quotient der Kraft durch die Querschnittsfläche berechnen.

Für die Kraft und die Querschnittsflächen wählen wir Zahlenbeispiele und erhalten die konstanten Zugspannungen  $\sigma_1$  am oberen und  $\sigma_2$  am unteren Schnitt:

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1} = \frac{700 \text{ N}}{7000 \text{ mm}^2} = 0,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 0,1 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_2 = \frac{F}{A_2} = \frac{700 \text{ N}}{70 \text{ mm}^2} = 10 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 10 \text{ MPa.}$$

Dabei ergibt sich eine 100-mal größere Spannung am kleineren Querschnitt unten. Das Gewebe des sehnigen Muskelansatzes kann allerdings auch deutlich größere Zugspannungen ertragen als das Muskelgewebe.

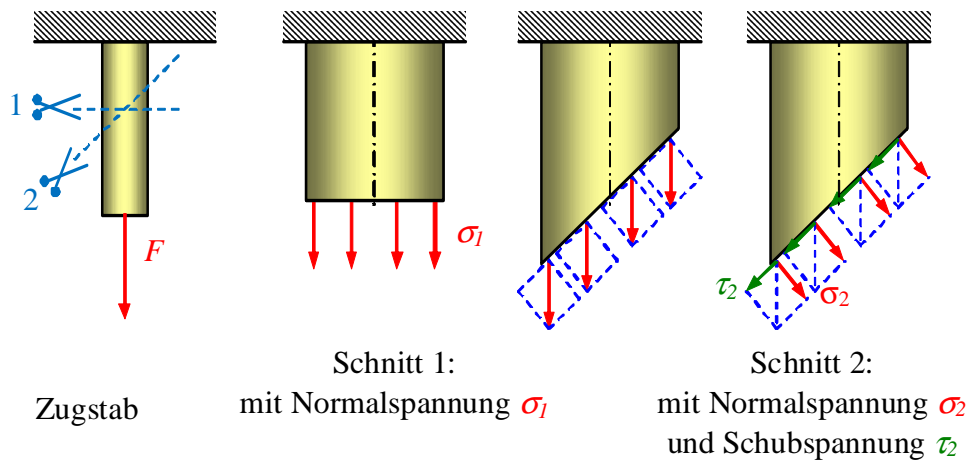


### 4.1.1 Normal- und Schubspannungen

Man unterscheidet zwei Spannungsarten, *Normal-* und *Schubspannungen*. Um dies zu verdeutlichen fragen wir nach den Spannungen in einem bestimmten Punkt eines Zugstabs (siehe Bild).

Beim Schnitt 1 senkrecht zum Stab erhalten wir eine Zugspannung  $\sigma_1$ , die senkrecht (normal) zur Schnittfläche steht, dies ist eine reine Normalspannung.

Beim schrägen Schnitt 2 dagegen steht die Spannung schräg auf der Schnittfläche. Sie kann in einen Anteil *normal* und in einen Anteil *tangential* zur Schnittfläche aufgeteilt werden. Man erhält zwei Komponenten der Spannung<sup>3</sup>, die Normalspannung (Zug- oder -druck)  $\sigma_2$  und die Schubspannung  $\tau_2$ .



Aus diesem Beispiel lässt sich erkennen, dass das Wesen der Spannung in einem Punkt eines Körpers nicht pauschal zu benennen ist, sondern von der (gedanklichen) Schnittführung abhängt.

Zum Merken:

Zuerst muss man einen Punkt und einen Schnitt durch diesen Punkt auswählen, dann kann man Art und Größe der Spannung in diesem Punkt des Körpers angeben.

*Normalspannungen* stehen senkrecht zur Schnittfläche.

*Schubspannungen* liegen tangential zur Schnittfläche.

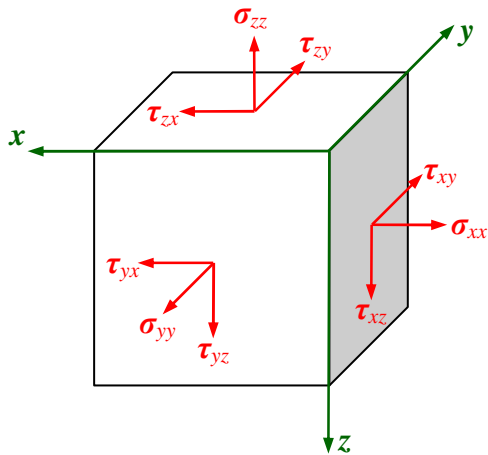
<sup>3</sup> Ein voller dreidimensionaler Spannungszustand in einem Punkt wird durch neun Spannungskomponenten angegeben, von denen allerdings nur sechs unabhängig voneinander sind.

### 4.1.2 Der allgemeine 3d Spannungszustand

Bisher wurde angenommen, die Spannung sei über die betrachteten Flächen gleichverteilt. Im Allgemeinen ist dies nicht der Fall. Eine bessere Spannungsdefinition für nicht-konstante Spannungsverteilungen in einem Punkt auf der Fläche  $\Delta A$  ist daher

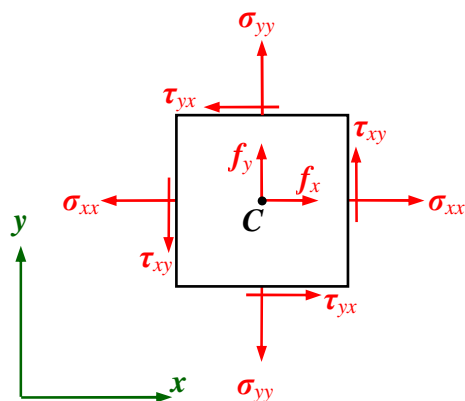
$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

wie wir auch schon in Abschnitt 3.5, Beispiel 6, festgestellt hatten. Im Dreidimensionalen existieren in einem Schnitt drei Spannungskomponenten, eine Normal- und zwei Schubspannungen. Außerdem können wir drei Schnitte durchführen, z.B. frontal, sagittal und transversal. Daraus ergeben sich also neun Spannungskomponenten, die den vollständigen 3d Spannungszustand in einem Punkt im Körper kennzeichnen. Diese werden im 3d *Spannungstensor* zusammengefasst:



$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Jede Zeile entspricht hier also den drei Spannungskomponenten an einer Schnittfläche.



Gehen wir von einem sogenannten Boltzmann-Kontinuum aus, das heißt dass auf das Kontrollvolumen nur auf Masse verteilte Kräfte und keine Momente wirken, so sind nur sechs Komponenten des Spannungstensors linear unabhängig.

Dies veranschaulichen wir, indem wir aus dem 3d Kontrollvolumen lediglich eine Fläche betrachten und das Momentengleichgewicht gegen den Uhrzeigersinn um den Mittelpunkt  $C$  berechnen. Dies entspricht dem Momentengleichgewicht um die zur z-Achse parallele Gerade durch das Zentrum des Kontrollvolumens. Die Kräfte die zur Berechnung der Momente benötigt werden berechnen sich durch *Spannung mal Fläche*, wir erhalten also

$$\sum M^{(C)} = 2 \cdot \underbrace{\tau_{xy} \Delta y \Delta z}_{\text{Kraft}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \Delta x}_{\text{Hebelarm}} - 2 \cdot \underbrace{\tau_{yx} \Delta x \Delta z}_{\text{Kraft}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \Delta y}_{\text{Hebelarm}} = 0.$$

Daraus ergibt sich demnach

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

und derselbe Zusammenhang ergibt sich für die anderen Schubspannungen. Wir erhalten also in der Tat sechs linear unabhängige Spannungskomponenten.

## 4.2 Dehnungen

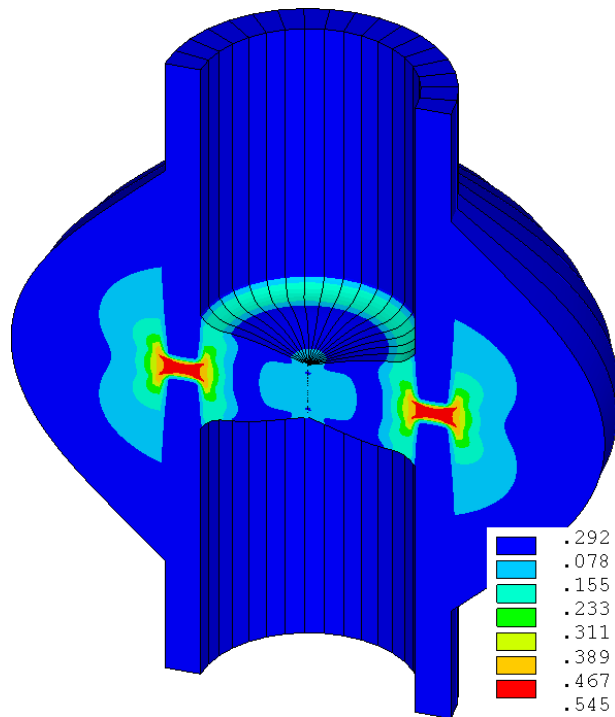
Alle belasteten Körper erfahren eine Änderung ihrer Form. Diese Formänderung misst man im Vergleich zu einem Referenzzustand, meistens dem unbelasteten Zustand.

Man unterscheidet die

- globale, äußere Dehnung, die *Verformung* eines Körpers von den
- lokalen, inneren Dehnungen, den *Verzerrungen* im Körper.

Als Beispiel betrachten wir einen Frakturkallus – neugebildetes Knochengewebe nach einer Fraktur – im frühen Heilungsstadium. Wird der Knochen axial belastet, so vermindert sich der Frakturspalt. Man spricht von *interfragmentärer Dehnung* und meint die globale Dehnung der Gewebeschicht zwischen den Frakturen. Dazu wird die Annäherung der Fraktarenden auf die ursprüngliche Spaltbreite bezogen.

Der lokale Dehnungszustand des Kallusgewebes dagegen ist sehr viel komplizierter. Das Bild zeigt ein Ergebnis einer Computersimulation mit der Methode der finiten Elemente (FEM). Die dunkelroten Bereiche zwischen den Fraktarenden erfahren die größten Verzerrungen (Gestaltänderung bis zu 55%).

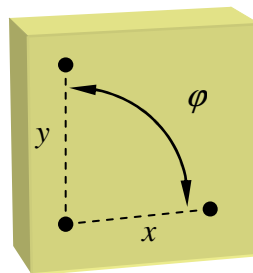


Verteilung der lokalen Dehnung (Gestaltänderungsanteil) im frühen Frakturkallus.

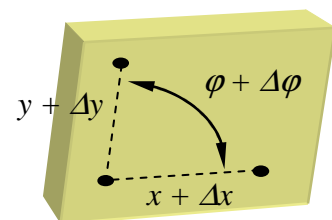
### Definition des lokalen Dehnungszustands

Um die lokalen Dehnungen zu definieren, betrachten wir drei Punkte in einem kleinen Element eines Körpers. Die Punkte spannen den rechten Winkel  $\varphi$  auf. Der Abstand  $x$  und  $y$  der Punkte sei infinitesimal (= unendlich) klein.

Im verformten Zustand haben sich Abstände und Winkel zwischen den Punkten verändert. Daraus können drei unabhängige Dehnungsgrößen für die betrachtete Ebene abgeleitet werden:



unverformt



verformt

$$\begin{aligned} \text{Normaldehnung in x-Richtung:} & \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\Delta x}{x}, \\ \text{Normaldehnung in y-Richtung:} & \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\Delta y}{y}, \\ \text{Schubverzerrung:} & \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \Delta \varphi. \end{aligned}$$

Zum Merken:

*Dehnung = relative Längenänderung (Winkeländerung)*

Die Dehnung ist also einheitenlos.

#### 4.2.1 Der allgemeine 3d Dehnungszustand

Ebenso wie für die Spannung lässt sich auch für die Dehnung ein 3d Dehnungstensor bestimmen. Statt zwei Normaldehnungen und einer Schubverzerrung erhalten wir wie für die Spannung drei Normal- und sechs Schubdehnungen. Ganz allgemein gilt für die Dehnung in einem Punkt  $P$ ,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right), \quad i, j \in \{x, y, z\}.$$

Dabei bezeichnet  $u = (u_x, u_y, u_z)$  den Verbindungsvektor des Punktes  $P$  zur neuen Lage  $P_{\text{neu}}$  nach Verformung. Man erkennt direkt  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ . Der Dehnungstensor ergibt sich zu

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

### 4.3 Materialgesetze

Materialgesetze beschreiben das mechanische Verhalten der Stoffe. Sie liefern eine Beziehung zwischen dem lokalen Spannungszustand und dem lokalen Dehnungszustand innerhalb eines Körpers<sup>4</sup>. Ein *steifer* Werkstoff zeigt bei gleicher Spannung eine geringere Dehnung als ein *weicher* Werkstoff.

#### 4.3.1 Linear-elastisches, isotropes Materialgesetz

Das einfachste Materialgesetz beschreibt linear-elastisches, isotropes Verhalten:

- *Linearität*: eine doppelt so große Spannung führt zu einer doppelt so großen Dehnung.
- *Elastizität*: der Werkstoff verformt sich reversibel. Nimmt man die Spannungen weg verschwinden auch die Dehnungen wieder vollständig.
- *Isotropie*: der Werkstoff verhält sich richtungs-unabhängig, z.B. ist die Steifigkeit in alle Richtungen gleich groß.

---

<sup>4</sup> Kompliziertere Werkstoffgesetze berücksichtigen z.B. auch die Dehnungsgeschwindigkeit oder auch die Dehnungsvorgeschichte.



**Zum Merken:**

Ein linear-elastisches, isotropes Werkstoffverhalten wird durch zwei Werkstoffparameter gekennzeichnet:

*Querkontraktionszahl*  $\nu$  (engl.: Poisson ratio).

*Elastizitätsmodul*  $E$  (engl.: Young's modulus, kurz: E-Modul).

Alternativ können auch *E-Modul* und *Schubmodul*  $G$  (engl.: shear modulus) zusammen angegeben werden. Zur Verwendung dieser Parameter siehe Abschnitt 4.4 „Einfache Lastfälle“.

**Querkontraktionszahl**

Die *Querkontraktionszahl* ist ebenfalls eine materialabhängige Konstante und definiert als negatives Verhältnis aus relativer Dickenänderung  $\varepsilon_{\text{Dicke}} = \Delta d/d$  zur relativen Längenänderung  $\varepsilon_{\text{Länge}} = \Delta \ell/\ell$ :

$$\nu = -\varepsilon_{\text{Dicke}}/\varepsilon_{\text{Länge}}$$

Anschaulich bedeutet dies, wenn man an einem Bauteil in Längsrichtung zieht ergibt sich nicht nur eine Längenänderung, sondern in der Regel nimmt die Dicke des Werkstoffs gleichzeitig ab. Diesen proportionalen Zusammenhang beschreibt die Querkontraktionszahl. In den meisten Fällen liegt  $\nu$  im Bereich zwischen 0 und 0,5. Das Verhältnis zwischen relativer Volumenänderung zu relativer Längenänderung ergibt sich zu  $1 - 2\nu$ .

**Elastizitätsmodul**

Der *Elastizitätsmodul* beschreibt den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung bei der Verformung eines festen Körpers mit linear-elastischem isotropem Verhalten. Dies wird ausgedrückt durch das *Hookesche Gesetz*:

**Hookesches Gesetz:**

$$\sigma = E \cdot \varepsilon.$$

Werkstoffe mit hohem E-Modul sind also *steifer* als Werkstoffe mit kleinerem E-Modul. D.h. der Verformung wird mehr Widerstand entgegengesetzt. Da die Dehnung keine Einheit besitzt, hat der E-Modul dieselbe Einheit wie die Spannung, also *Pascal* bzw. *Mega-Pascal*.

**4.3.2 Verallgemeinertes Hookesches Gesetz (Anisotropien)**

Man kann das Hookesche Gesetz auch allgemeiner als Tensorgleichung auffassen. Der voll besetzte Tensor von 4. Stufe für drei Dimensionen besteht aus 81 Komponenten. Aufgrund von Symmetrieeigenschaften, genauer der Gleichheit zugeordneter Schubspannungen und Scherdehnungen in Boltzmann-Kontinua, reduziert sich diese Anzahl auf 36 und man kann das Gesetz zu einer Matrixgleichung überführen der Form  $\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\varepsilon}$ , wobei  $\underline{\sigma}$  den Vektor der sechs linear unabhängigen Schub- und Scherspannungen sowie entsprechend  $\underline{\varepsilon}$  den Vektor der

sechs linear unabhängigen Komponenten der Dehnung darstellen und  $\underline{E}$  eine  $6 \times 6$  Matrix. Desweiteren gilt für die Anzahl der benötigten Komponenten zur Beschreibung von  $\underline{E}$ :

|   |    |
|---|----|
| Voll besetzter Tensor 4. Stufe für drei Dimensionen   | 81 |
| Boltzmann Kontinua: Gleichheit zugeordneter Schubspannungen und Scherdehnungen                                    | 36 |
| Maxwellscher Reziprozitätssatz: Volle Anisotropie, $\underline{E}$ symmetrisch                                    | 21 |
| Orthotropie = Orthogonale Anisotropie: keine Kopplung zw. Dehnung und Schubverzerrung                             | 9  |
| Transversale Isotropie: keine Kopplung zw. Dehnung und Schubverzerrung, invariant ggü. Drehung um Bestimmte Achse | 5  |
| Isotropie: Abhängigkeit ausschließlich von $E$ und $\nu$  | 2  |

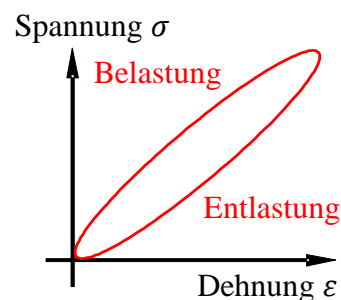
Im letzteren Fall gilt zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & & \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{pmatrix}.$$

Es gilt also tatsächlich, dass linear-elastisches, isotropes Werkstoffverhalten durch die zwei Werkstoffparameter gekennzeichnet  $E$  und  $\nu$  definiert wird, wie wir in obigem Merksatz definiert hatten.

Bei den anderen Fällen handelt es sich stets um *anisotrope Materialgesetze*, bei denen der Werkstoffe ein richtungsabhängiges Verhalten aufzeigt. Knochen hat ähnlich wie Holz eine Vorzugsrichtung und ist daher anisotrop.

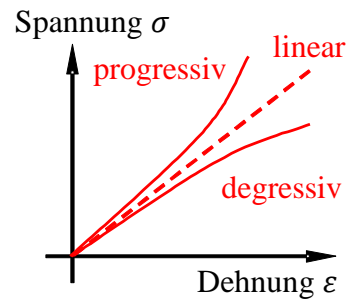
Für weitere Beispiele siehe Übung...



### 4.3.3 Kompliziertere Materialgesetze

#### Nicht-Linear

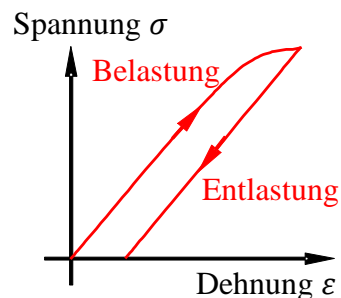
Ein Materialverhalten heißt *nicht-linear*, falls die Spannung nicht proportional mit der Dehnung wächst. Die Spannungs-Dehnungs-Kurve ist dann keine Gerade mehr. Bei einem *progressiven* Verhalten weicht die Kurve mit zunehmenden Dehnungen nach oben, bei einem *degressiven* Verhalten nach unten von der Geraden ab. Die Spannung wächst dann über- bzw. unterproportional mit der Dehnung.



Nichtlineares Verhalten

#### Nicht-Elastisch/Plastisch

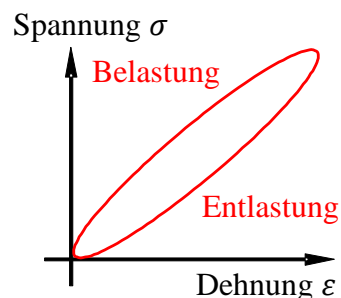
Werkstoffe heißen *nicht-elastisch* oder *plastisch*, falls sie sich bleibend (d.h. nicht reversibel) verformen. Die Spannungs-Dehnungs-Kurve liegt für die Entlastung unterhalb der Kurve für die Belastung. Bei vollständiger Entlastung verbleibt eine plastische Dehnung.



Plastisches Verhalten

#### Viskoelastisch – mit innerer Dämpfung

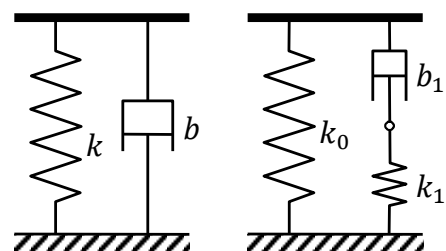
Dies sind Materialgesetze, bei denen die Verformungsgeschwindigkeit berücksichtigt wird. Die Spannungen wachsen mit der Dehnungsrate. Bei zyklischer Beanspruchung ergibt sich eine (dynamische) Hysterese im Spannungs-Dehnungs-Diagramm. Die Fläche innerhalb der Hysterese ist ein Maß für die durch Dämpfung in Wärme umgewandelte Energie. Es gibt keine plastischen Verformungen. Typisches Beispiel: Gummi.



Viskoelastisches Verhalten

#### Viskoelastisch – mit Gedächtniseffekt

Dies sind Materialgesetze, bei denen die Beanspruchungsvorgeschichte eine Rolle spielt. Der Augenblickliche Spannungszustand kann nicht allein aus dem augenblicklichen Dehnungszustand berechnet werden. Solche Werkstoffe zeigen Effekte wie Kriechen und (Spannungs-) Retardieren. Typisches Beispiel: Knorpel.



Viskoelastische Ersatzmodelle links ohne, rechts mit Gedächtniseffekt

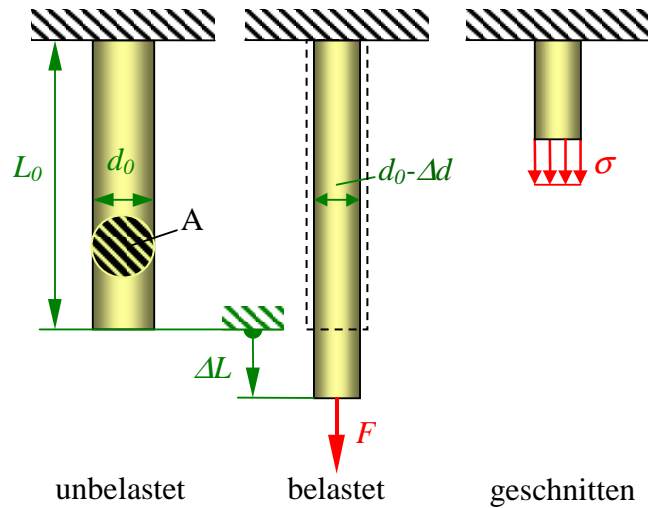
Es gibt noch viele weitere „unangenehme“ Materialeigenschaften, die bei biologischen Geweben auch gern gehäuft auftreten.

### 4.4 Einfache Lastfälle

Wir betrachten einige einfache, aber elementare Lastfälle. Als Werkstoffgesetz nehmen wir ein linear-elastisches, isotropes Verhalten an.

#### 4.4.1 Zug und Druck

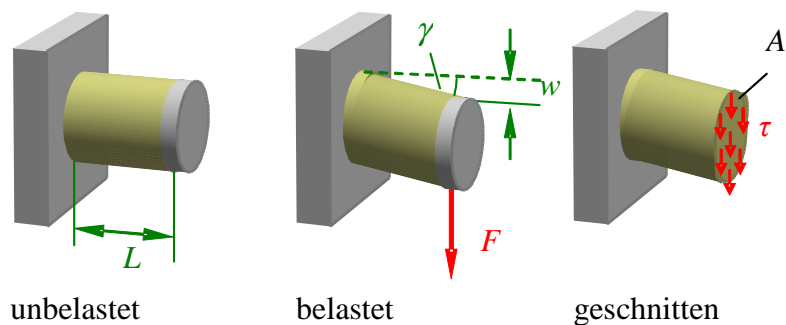
Ein Dehnstab (Zugstab) mit Dehnsteifigkeit  $EA$  erfährt durch eine Zug- oder Druckkraft eine *einachsige* Beanspruchung. Mit  $\nu$  bezeichnen wir wie bisher die Querkontraktionszahl und die Spannung  $\sigma$  wird als konstant über den Querschnitt angenommen.



|  |  |
|--|--|
| <i>Äußere Last: Zug- oder Druckkraft F</i>   |  |
| <i>Globale (äußere) Verformung</i>           | Längenänderung $\Delta L$  |
| <i>Globale Bauteilsteifigkeit k</i>          | $F = \frac{EA}{L_0} \Delta L, k = \frac{EA}{L_0}$  |
| <i>Innere Beanspruchung im Querschnitt A</i> | Normalspannung $\sigma = \frac{F}{A}$  |
| <i>Innere Dehnungen</i>                      | Längsänderung $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0},$<br>Querdehnung $\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d_0} = -\nu \varepsilon$ |

#### 4.4.2 Scherung

Ein Scherstift mit Schersteifigkeit  $GA$ , wobei mit  $G$  das Schubmodul bezeichnet wird, wird durch eine Scherkraft senkrecht zu seiner Längsachse belastet. Ein Scherstift unterscheidet sich von einem Biegebalken durch ein viel kleineres



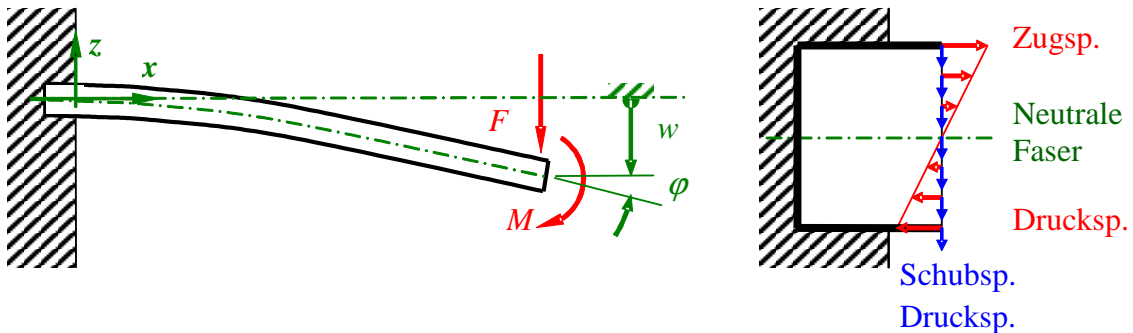
Verhältnis von Länge zu Höhe (Durchmesser). Die Verformung entsteht in erster Linie durch ein „Abgleiten“ der Querschnitte, die dabei parallel zueinander bleiben. Sowohl die Schub-

spannung  $\tau$  als auch die Schubverzerrung  $\varepsilon_{xy}$  werden als konstant verteilt über den Querschnitt  $A$  angenommen.

| Äußere Last: Scherkraft $F$             |  |
|---|--|
| Globale Verformung                      | Scherweg $w$ ,<br>Scherwinkel $\gamma$                 |
| Globale Bauteilsteifigkeit $k$          | $F = \frac{GA}{L}w$ , $k = \frac{GA}{L}$               |
| Innere Beanspruchung im Querschnitt $A$ | Schubspannung $\tau = \frac{F}{A}$                     |
| Innere Verzerrungen                     | Schubverzerrung $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma$ |

### 4.4.3 Biegung (Kragbalken)

Ein schlanker Balken ist an einem Ende fest eingespannt und wird am anderen Ende durch eine Querkraft und/oder ein Moment belastet. Die Verformung geschieht im Gegensatz zur Scherung hauptsächlich durch ein „Kippen“ der Querschnitte gegeneinander, die dabei eben bleiben. Der hier betrachtete Kragbalken habe die Biegesteifigkeit  $EI_a$  und die Länge  $L$ .



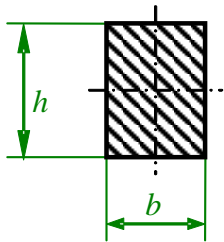
| Äußere Lasten: Kraft $F$ und/oder Moment $M$        |   |
|---|---|
| Globale Verformung am Balkenende                    | Absenkung $w$ ,<br>Neigungswinkel $\varphi$   |
| Globale Bauteilnachgiebigkeit<br>(Kragbalkenformel) | $w = \frac{L^3}{3EI_a}F + \frac{L^2}{2EI_a}M$ ,<br>$\varphi = \frac{L^2}{2EI_a}F + \frac{L}{EI_a}M$ |
| Innere Beanspruchung im Querschnitt $A$             | siehe unten...  |
| Innere Verzerrungen                                 | siehe unten...  |

## Axiales Flächenmoment zweiten Grades

Das *Flächenmoment zweiten Grades*  $I_a$  beschreibt den Teil der *Biegesteifigkeit*  $EI_a$  eines Balkens der aus der Form des Querschnitts herrührt. Es ist also eine rein geometrische Größe und besitzt die Einheit  $\text{m}^4$ . Oft ist noch der ältere, etwas irreführende Begriff „Flächenträgheitsmoment“ zu finden.

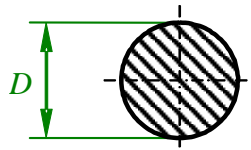
### Beispiele axialer Flächenmomente (Biegung um die horizontale Achse)

Rechteck-Querschnitt:



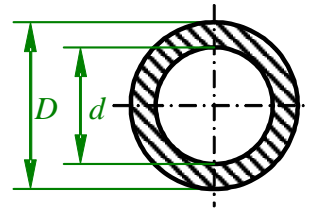
$$I_a = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Vollkreis-Querschnitt:



$$I_a = \frac{\pi}{64} D^4$$

Rohr-Querschnitt:



$$I_a = \frac{\pi}{64} (D - d)^4$$

Ein Rohr ähnlich einem Knochen, bei dem der Innendurchmesser 70% des Außendurchmessers beträgt, erreicht bei gleichem Gewicht (d.h. gleicher Querschnittsfläche) und gleichem Material etwa die dreifache Biegesteifigkeit eines Vollkreis-Querschnitts. → *Leichtbauprinzip*. Unsere Bilder für den Voll- und Rohrquerschnitt geben diese Verhältnisse maßstäblich wieder.

### Innere Beanspruchung im Querschnitt A

Der Betrag der Normalspannung  $\sigma$  in einem Querschnitt verläuft linear von unten nach oben. Auf der Unterseite herrscht eine Druckspannung, auf der Oberseite eine Zugspannung. Die spannungsfreie Schicht heißt *neutrale Faser*. Der Abstand  $z$  wird von der neutralen Faser zur Zugseite hin positiv gezählt.  $M_b(x) = M + F(L - x)$  ist das im Querschnitt an der Stelle  $x$  lokal wirkende Biegemoment.

$$\sigma(x, z) = \frac{M_b(x)}{I_A} z, \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{b,\max}}{I_A} z_{\max} = \frac{(M + FL) h}{I_A} \frac{1}{2}$$

Zum Merken:

Die größte Normalspannung  $\sigma_{\max}$  tritt an der Einspannung ( $x = 0$ ) und an der Oberseite ( $z = h/2$ ) des Balkens auf.

Achtung: Im gezeichneten Querschnitt entsteht aufgrund der Querkraft auch die Schubspannungen  $\tau = F/A$ .

### Innere Verzerrungen

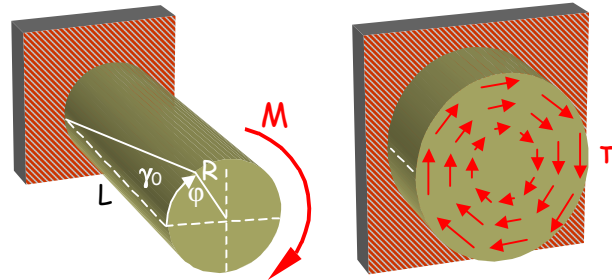
Die Krümmung  $\chi$  ist proportional zum lokalen Biegemoment  $M_b(x)$  im Balken. Es gilt

$$\chi(x) = \frac{1}{R(x)} \approx w''(x) = \frac{M_b(x)}{EI_A}$$

Das größte Biegemoment und damit die größte Krümmung finden wir wiederum an der Einspannung (im Bild links).

### 4.4.4 Torsion

Ein Torsionsstab mit Torsionssteifigkeit  $GI_T$  der Länge  $L$  mit Radius  $r$  wird an einem Ende fest eingespannt und am anderen Ende durch ein Torsionsmoment  $M$  verdrillt.  $I_T$  bezeichnet das Torsions-Flächenmoment zweiten Grades.



|  |   |
|--|---|
| <i>Äußere Lasten:</i> Moment $M$             |   |
| <i>Globale Verformung</i>                    | Verdrehwinkel $\varphi$ ,<br>Drillwinkel außen $\gamma_0 = \varphi \cdot R/L$ |
| <i>Globale Drehsteifigkeit c:</i>            | $M = \frac{GI_T}{L} \varphi, \quad c = \frac{GI_T}{L}$                        |
| <i>Innere Beanspruchung im Querschnitt A</i> | siehe unten...  |
| <i>Innere Verzerrungen</i>                   | siehe unten...  |

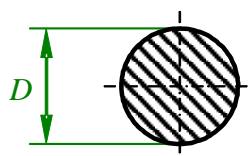
### Torsions-Flächenmoment und polares Flächenmoment zweiten Grades

Das Torsions-Flächenmoment  $I_T$  beschreibt den Teil der Torsionssteifigkeit  $EI_T$  eines Stabes der aus der Form des Querschnitts herrührt. Es ist also eine rein geometrische Größe und besitzt die Einheit  $m^4$ . Nur für geschlossene kreisförmige (rohrförmige) Querschnitte gilt, dass das Torsions-Flächenmoment dem polaren Flächenmoment entspricht, also  $I_T = I_P$ .

### Beispiele polarer Flächenmomente

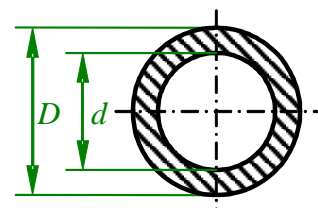
Wie bei der Biegung gilt auch hier, dass ein Rohr, bei dem der Innendurchmesser 70% des Außendurchmessers beträgt, bei gleichem Gewicht und gleichem Material etwa die dreifache Torsionssteifigkeit erreicht wie die eines Vollkreis-Querschnitts.

Vollkreis-Querschnitt:



$$I_T = I_P = \frac{\pi}{32} D^4$$

Rohr-Querschnitt:



$$I_T = I_P = \frac{\pi}{32} (D - d)^4$$

Zum Merken:

*Der Röhrenknochen hat eine günstige (materialsparende) Gestalt bei Torsions- und Biegebeanspruchungen.*

### Innere Beanspruchung im Querschnitt A

Der Betrag der konzentrisch verlaufenden Schubspannungen  $\tau$  nimmt linear von innen nach außen zu (siehe Bild). Für die maximale Schubspannung am Mantel gilt

$$\tau_{\max} = \frac{M}{I_T} R = G \frac{R}{L} \varphi.$$

### Innere Verzerrungen

Mit dem Abstand  $r$  vom Zentrum gilt für den Scherwinkel

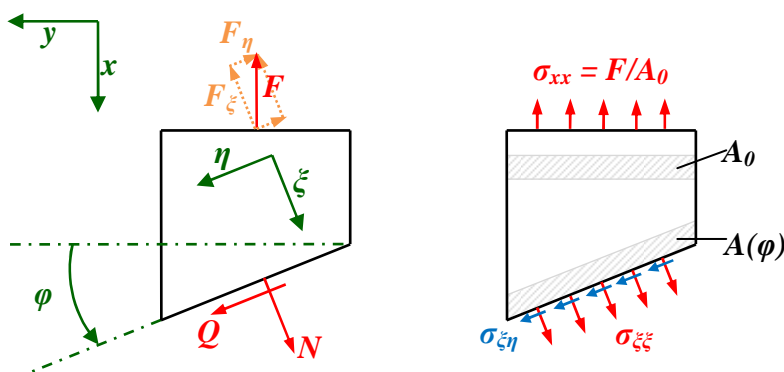
$$\gamma = \frac{r}{L} \varphi.$$

## 4.5 Spannungs- und Dehnungstransformation

In diesem Abschnitt werden wir uns damit beschäftigen, wie man Spannungen und Dehnungen in verschiedene Koordinatensysteme umrechnet.

### 4.5.1 Mohrscher Spannungskreis (2d)

Im Beispiel betrachten wir ein infinitesimal kleines Bauteil, das an einer Seite schräg zum  $xy$ -Koordinatensystem geschnitten wurde im Winkel  $\varphi$ . Desweiteren führen wir ein weiteres  $\xi\eta$ -



Koordinatensystem ein, welches um eben diesen Winkel  $\varphi$  gedreht wurde. Wir nehmen an dass die auf das Bauteil wirkenden Kräfte zu gleichmäßig verteilten Normal- bzw. Schubspannungen auf den Oberflächen führen.

Aus der bekannten Kraft  $F$  wollen wir nun die Normal- und Querkraft sowie die Normal- und Schubspannung an der schiefen Fläche berechnen. Wir berechnen zuerst die Kräftegleichgewichte in  $\xi$ -Richtung und in  $\eta$ -Richtung und erhalten Normal- und Querkraft:

$$\begin{aligned} \sum F_{i,\xi} = 0 &\Rightarrow N - F_\xi = 0 \Rightarrow N = \cos \varphi \cdot F, \\ \sum F_{i,\eta} = 0 &\Rightarrow Q - F_\eta = 0 \Rightarrow Q = \sin \varphi \cdot F. \end{aligned}$$

Für die schiefe Fläche gilt  $A(\varphi) = A / \cos \varphi$ . Damit folgt für die Normal- und Schubspannung an  $A(\varphi)$  direkt:



$$\sigma_{\xi\xi}(\varphi) = \frac{N(\varphi)}{A(\varphi)} = \frac{F}{A} \cos^2 \varphi = \sigma_{xx} \cos^2 \varphi,$$

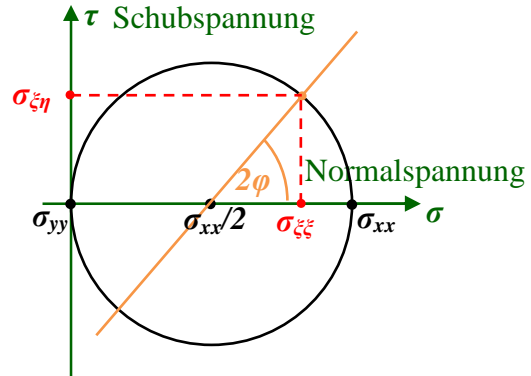
$$\sigma_{\xi\eta}(\varphi) = \frac{Q(\varphi)}{A(\varphi)} = \frac{F}{A} \sin \varphi \cos \varphi = \sigma_{xx} \sin \varphi \cos \varphi.$$

Allgemein lässt sich also sagen

$$\sigma_{\xi\xi} = \sigma_{xx} \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi),$$

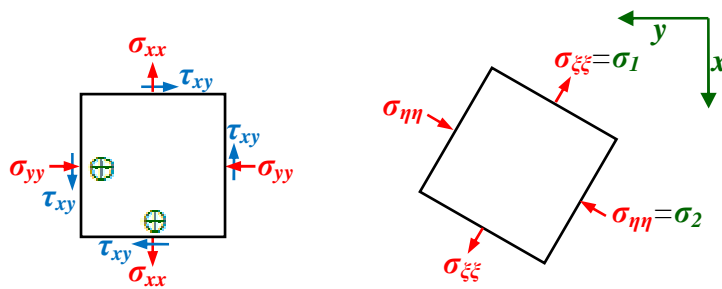
$$\sigma_{\xi\eta} = \sigma_{xx} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi.$$

Dies lässt sich anschaulich mit dem sogenannten *Mohrschen Spannungskreis* veranschaulichen, wie im Bild rechts. Es folgt, dass die Schubspannung maximal halb so groß sein kann wie die Normalspannung.



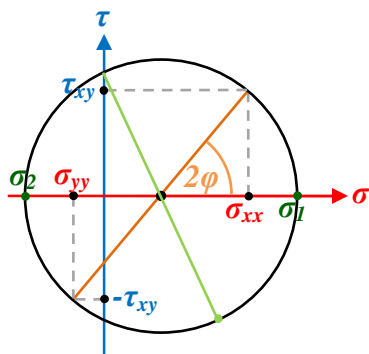
**Beispiel a) Allgemeiner ebener Spannungszustand**

Gegeben sei ein allgemeiner Spannungszustand mit Zug-, Druck und Schubspannungen. Dieser ist im linken Bild dargestellt.



Anmerkung: Im Allgemeinen Fall werden die Pfeile der Normalspannung, also Zug- und Druckspannung, beide nach außen gerichtet. Die Komponenten der Zugspannung sind dann positiv, die der Druckspannung negativ. Zur besseren Darstellung haben wir hier die Pfeile intuitiv ausgerichtet, die Komponenten sind dann jeweils positiv. Schubspannungskomponenten sind positiv, wenn sie am positiven Schnittufer ⊕ in Koordinatenrichtung zeigen.

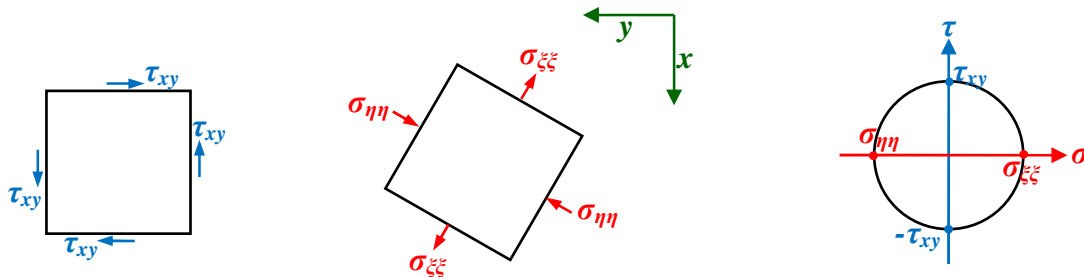
Wir wollen nun mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises denjenigen Winkel bestimmen, sodass ein schubspannungsfreier Spannungszustand wie im rechten Bild erreicht wird. Dazu tragen wir Schub- und Normalspannungen in ein Koordinatensystem ein. Mit Hilfe der grau gestrichelten Linien können wir Radius und Mittelpunkt des Mohrschen Spannungskreises bestimmen und damit den Winkel φ. Die Schnitte des Kreises mit der σ-Achse bestimmen die Normalspannungen des schubspannungsfreien Zustands.



Normalspannungen links der τ-Achse sind Druckspannungen, rechts Zugspannungen. Mit der hellgrünen Linie wird also ein Zustand beschrieben, bei dem nur in eine Richtung Normalspannungen auftreten, in beide Richtungen ist hier nicht möglich. Diese Normalspannung ist hier also eine Zugspannung und wird durch den Mittelpunkt des Kreises bestimmt.

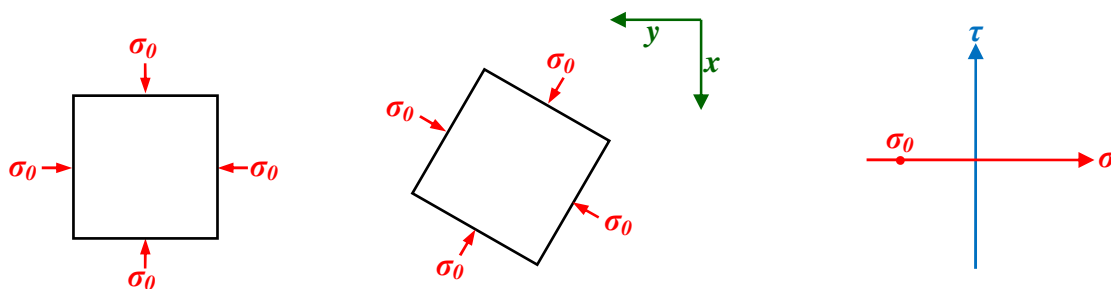
### Beispiel b) Reiner Schubspannungs-Zustand

Treten bei einem Schnitt parallel zu den Koordinatenachsen ausschließlich Schubspannungen auf, so treten bei einem um  $45^\circ$  gedrehten Schnitt ausschließlich Normalspannungen auf.



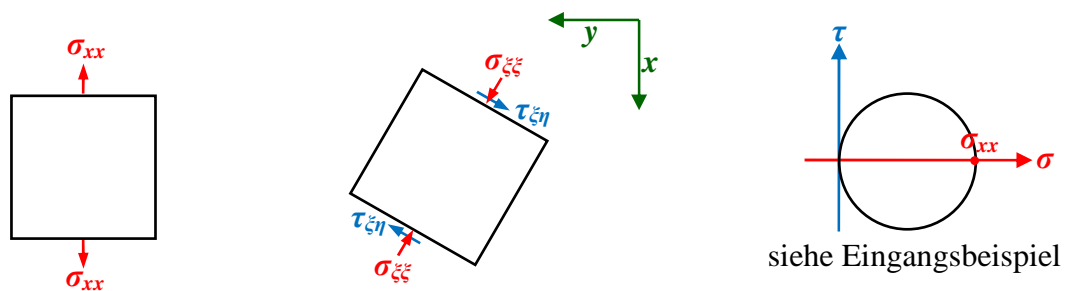
### Beispiel c) Hydrostatischer Spannungszustand

Im hydrostatischen Fall treten keine Schubspannungen auf und die Normalspannungen sind unabhängig vom Schnittwinkel. Der Mohrsche Spannungskreis reduziert sich zu einem einzelnen Punkt. Der Name (*hydro* für Wasser und *statisch* für ruhend) leitet sich aus der Tatsache her, dass der Druck in einer idealen Flüssigkeit an einem Punkt in alle Richtungen gleich ist. In ruhendem Wasser treten also keine Schubspannungen auf, ohne dass das Wasser zum fließen gebracht wird.



### Beispiel d) Einachsiger Spannungszustand

Im einachsigen Spannungszustand (entspricht im Prinzip einem 1d-Fall). Man erkennt dass die maximale Schubspannung gerade halb so groß wie die maximale Normalspannung  $\sigma_{xx}$  ist. Dies haben wir auch schon im Eingangsbeispiel des Abschnittes festgestellt.

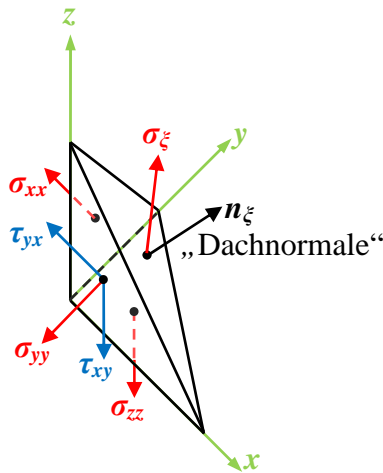


## 4.5.2 Spannungstransformation für den allgemeinen 3d-Fall

Der Mohrsche Spannungskreis transformiert nur ebene Spannungszustände, das heißt Zustände der Form

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In diesem Abschnitt betrachten wir Transformationen im dreidimensionalen Fall. Im Bild dargestellt ist eine (infinitesimal kleine) dreiseitige Pyramide mit Seitenflächen  $A_x$  (hinten),  $A_y$  (vorne),  $A_z$  (unten) und der Dachfläche  $A_\xi$  mit der Dachnormalen



$$\vec{n}_\xi = (n_x, n_y, n_z)^T.$$

Für die Normale gilt desweiteren der Zusammenhang

$$n_i = \frac{A_i}{A_\xi}, i \in \{x, y, z\}.$$

Wir stellen nun das Kräftegleichgewicht an dem Körper auf:

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi x} A_\xi &= \sigma_{xx} A_x + \tau_{yx} A_y + \tau_{zx} A_z, \\ \sigma_{\xi y} A_\xi &= \tau_{xy} A_x + \sigma_{yy} A_y + \tau_{zy} A_z, \\ \sigma_{\xi z} A_\xi &= \tau_{xz} A_x + \tau_{yz} A_z + \sigma_{zz} A_z. \end{aligned}$$

Teilen durch  $A_\xi$  ergibt nun

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{\xi x} \\ \sigma_{\xi y} \\ \sigma_{\xi z} \end{pmatrix}}_{\vec{\sigma}_\xi} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}}_{\vec{n}_\xi}.$$

Für Boltzmann-Werkstoffe gilt  $\underline{\underline{\sigma}}^T = \underline{\underline{\sigma}}$ . Dies führt zur *Cauchy-Formel*

$$\vec{\sigma}_\xi = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}_\xi,$$

die den Spannungsvektor  $\vec{\sigma}_\xi$  am Schnitt orthogonal zur Normalen  $\vec{n}_\xi$  mit Hilfe des Spannungstensors  $\underline{\underline{\sigma}}$  angibt.

## 4.5.3 Hauptachsentransformation im 3-achsigen Spannungszustand

Wir suchen Hauptspannungs-Richtungen, sodass die Schubspannungen verschwinden. Das heißt, die Spannungsvektoren sind parallel zu den Schnittnormalen,

$$\vec{\sigma} = \lambda \vec{n}.$$

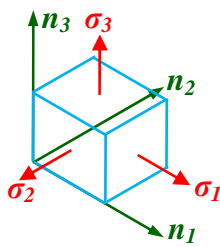
Schreibt man dies in Cauchy-Form, so ergibt sich also das Eigenwertproblem

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \lambda \vec{n},$$

wobei nicht-trivialen Lösungen durch  $\det(\underline{\underline{\sigma}} - \lambda I) = 0$  gegeben sind.  $I$  bezeichnet dabei die Einheitsmatrix in der passenden Größe. Wir erhalten also ein charakteristisches Polynom von dritter Potenz  $\lambda^3 - I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda - I_3 = 0$ . Dabei gilt für die Koeffizienten  $I_1, I_2, I_3$ , die sogenannten *Grundinvarianten des Spannungstensors*,

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} &&= \text{spur}(\underline{\underline{\sigma}}), \\ I_2 &= -(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2), \\ I_3 &= \det(\underline{\underline{\sigma}}). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte  $\lambda_k$  sind die *Hauptspannungen*  $\sigma_k$ , also  $\lambda_k = \sigma_k$  reell mit  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Die *Hauptspannungsrichtungen* sind genau die zugehörigen (normierten) Eigenvektoren  $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ . Wir erhalten also ein Orthogonalsystem.



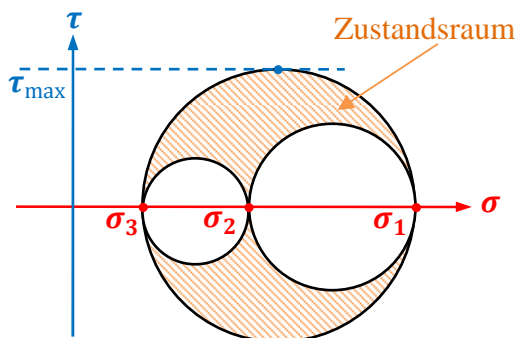
Die *Grundinvarianten des Spannungstensors* ergeben sich nun zu

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1), \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned}$$

Die *Hauptschubspannungen* (Schubspannungen in so gedrehten Schnitten, dass  $\tau_{\max}$  erreicht wird) sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3), \\ \tau_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \\ \tau_3 &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2). \end{aligned}$$

Da  $\sigma_1$  die größte und  $\sigma_3$  die kleinste Hauptspannung bezeichnet, ist  $\tau_2 = \tau_{\max}$  die größte der Schubspannungen. Dies veranschaulichen wir mit Hilfe von drei Mohrschen Spannungskreisen wie im Bild verdeutlicht. Der orange markierte Bereich bildet den Zustandsraum der möglichen Normal- und Schubspannungen.



Dabei bezeichnen Zustände auf dem Rand des äußeren Kreises Schnitte auf denen  $\vec{n}_2$  senkrecht steht, also Schnitte parallel zur  $\vec{n}_1\vec{n}_3$ -Ebene. Dementsprechend sind Zustände auf dem Rand des kleinen Innenkreises Schnitte parallel zur  $\vec{n}_2\vec{n}_3$ -Ebene senkrecht zu  $\vec{n}_1$  und Zustände auf dem

Rand des größeren Innenkreises Schnitte parallel zur  $\vec{n}_1\vec{n}_2$ -Ebene senkrecht zu  $\vec{n}_3$ .

### Sonderfall: „Hydrostatischer Spannungszustand“

Im Sonderfall des hydrostatischen Spannungszustandes, den wir schon in 2d betrachten haben, hat der Spannungstensor die folgende Form:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{kl} = \sigma_0 \delta_{kl}.$$

Hier sind die Hauptspannungsrichtungen gerade die Koordinaten-Richtungen.

### Zerlegung in Kugelteil und Deviator

Oftmals zerlegt man den Spannungstensor in zwei Teile, den Kugelteil und den Deviator (lat.: *deviare*: abweichen, *via*: Weg):

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^K + \underline{\underline{\sigma}}^D.$$

Der Kugelanteil  $\underline{\underline{\sigma}}^K$  beschreibt den hydrostatischen Anteil des Spannungstensors,

$$\underline{\underline{\sigma}}^K = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix},$$

mit einer mittleren Normalspannung  $\sigma_m = \frac{1}{3} \text{spur}(\underline{\underline{\sigma}})$ . Für den Deviator gilt also

$$\underline{\underline{\sigma}}^D = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^K.$$

Der Deviator spielt häufig eine wesentliche Rolle zur Beschreibung eines lokalen Beanspruchungszustands.

#### 4.5.4 Hauptachsentransformation für die Dehnung

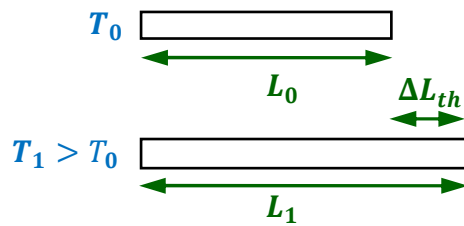
Die Hauptachsentransformation für die Dehnung funktioniert komplett Analog wie die der Spannung mit  $\varepsilon$  statt  $\sigma$ . Die Zerlegung in Kugelteil und Deviator entspricht hier der Zerlegung in einen reinen Volumenänderungsanteil (Kugelteil)  $\varepsilon_V = \frac{dV}{V_0} = \varepsilon_m = \frac{1}{3} \text{spur}(\underline{\underline{\varepsilon}})$  und einen reinen Gestaltänderungsanteil (Deviator). Eine Querkontraktionszahl  $\nu = 0,5$  bedeutet keine Volumenänderung. Dies würde einen Kompressionsmodul  $K = \infty$  bedeuten (dieser beschreibt die nötige Druckänderung, um eine Volumenänderung zu erreichen) und wird praktisch nie erreicht.

## 4.6 Wärmedehnung und -Spannung

### Beispiel 1: Wärmedehnung „freier“ Körper

Wir betrachten einen Körper der Länge  $L_0$  zu einer gegebenen Temperatur  $T_0$ . Nach einer Erwärmung auf die Temperatur  $T_1 > T_0$ , also nach einer Temperaturänderung  $\Delta T = T_1 - T_0$ ,

habe der Körper die Länge  $L_1 = L_0 + \Delta L_{th}$  mit  $\Delta L_{th} > 0$ . Für die Dehnung durch die Temperaturbedingte Verformung gilt



$$\varepsilon_{th} = \frac{\Delta L_{th}}{L_0} = \alpha \cdot \Delta T,$$

wobei  $\alpha$  den Wärmeausdehnungskoeffizienten angibt. Für Stahl gilt zum Beispiel der Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha_{Stahl} = 1,2 \cdot 10^{-5} K^{-1}$  mit der Einheit „eins durch Kelvin“.

Treten zusätzliche Spannungen und Dehnungen zum Beispiel durch weitere Belastungen auf, so ergibt sich eine Gesamtdehnung von

$$\varepsilon_{ges} = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{th}.$$

Dabei gilt für die einzelnen Komponenten des Spannungstensors:

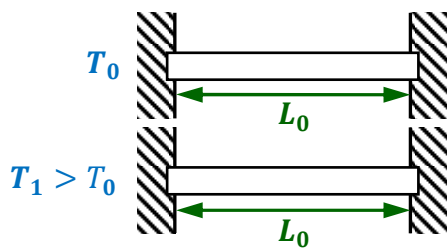
$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left[ \underbrace{\sigma_{xx} - \nu(G_{yy} + G_{zz})}_{\varepsilon_{xx,el}} \right] + \underbrace{\alpha \Delta T}_{\varepsilon_{xx,th}},$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1 + \nu}{2E} \sigma_{xy},$$

und analog für die anderen Größen.

## Beispiel 2: Wärmedehnung fest eingespannter Körper

Betrachten wir nun einen auf beiden Seiten fest eingespannten Körper. In der Referenzlage zur Temperatur  $T_0$  gelte eine unverspannte Ausgangssituation mit  $\sigma = 0$ .



Trotz neuer Temperatur  $T_1 > T_0$  muss hier weiterhin gelten, dass die Dehnung verschwindet. Wir fordern also

$$\varepsilon_{ges} = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{th} = 0.$$

Daraus folgt also  $\varepsilon_{el} = -\varepsilon_{th}$ . Gleichzeitig gilt allerdings, dass die erhöhte Temperatur zu einer Druckspannung führt, das heißt es gilt  $\sigma < 0$ . Daher erhalten wir

$$\sigma = E \varepsilon_{el} = -E \varepsilon_{th} = -E \cdot \alpha \Delta T,$$

was sich wiederum bedeutet, dass eine Kraft  $F$  gegeben wird durch

$$F = \sigma \cdot A = -EA \cdot \alpha \Delta T.$$

## 5 Energie, Arbeit, Leistung

### 5.1.1 Energie

Die *Einheit* der Energie ist ein Joule:  $J = N \cdot m$ . Neben der mechanischen Energie gibt es z.B. chemische Energie, Strahlungsenergie, Wärmeenergie. Die mechanische Energie kann man in *kinetische* und *potentielle* Energie unterteilen:

**Potentielle Energie:** tritt als *Lageenergie* oder als *Verformungsenergie* auf. Die Lageenergie eines Körpers mit der Masse  $m$ , der sich auf dem Niveau  $h$  über einem Referenzniveau  $h_0 = 0$  befindet lautet:

$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h.$$

Wird z.B. eine linear-elastische Feder (Steifigkeit  $k$ ) mit der Kraft  $F$  um die Strecke  $x$  verformt, dann beträgt die in ihr gespeicherte Verformungsenergie:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot F \cdot x = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2.$$

Hier ist die potentielle Energie quadratisch in  $x$ , da  $F$  bereits linear im Weg ist.

**Kinetische Energie:** Bewegt sich ein Körper mit der Masse  $m$  mit der Geschwindigkeit  $v$ , so berechnet sich seine kinetische Energie  $E_{kin}$  zu:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Bei Bewegungen um eine Achse mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , also Drehungen um einen Aufhängepunkt  $A$ , ergibt sich die kinetische Energie zu:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} J^A \omega^2,$$

wobei  $J^A$  das Massenmoment bzgl. des Aufhängepunkts  $A$  angibt.

### **Energieerhaltung, Energieumwandlung, Schwingungen:**

Energie kann nicht verloren gehen (erster Hauptsatz der Thermodynamik). Allerdings kann Energie wegtransportiert werden (Strahlung) oder in eine Form umgewandelt werden die man als unbrauchbar empfindet. Bei einer Schwingung (z.B. Pendel) werden die Energieformen kinetische und potentielle Energie laufend ineinander umgewandelt. Diese Umwandlung gelingt jedoch nie vollständig. Ein Teil der Energie wird immer auch in Wärmeenergie umgewandelt (Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik) und geht als mechanische Energie verloren. Alle Schwingungen sind gedämpft und kommen ohne äußere Energiezufuhr irgendwann zur Ruhe.

Zum Merken:

*Energie bleibt erhalten*

### 5.1.2 Arbeit

Die Arbeit  $W$  ist eine Differenz von Energien. Kräfte können mechanische Arbeit verrichten, wenn sich der Kraftangriffspunkt in Richtung der Kraft verschiebt. Bei konstanter Kraft gilt dann:

Zum Merken:

*Arbeit = Kraft mal Weg*

#### Beispiele:

- Hubarbeit: Wird ein Körper mit der Gewichtskraft  $F_G$  um die Höhe  $h$  angehoben, so berechnet sich die Hubarbeit  $W_{Hub}$  mit:

$$W_{Hub} = F_G \cdot h.$$

- Reibarbeit: Bewegt sich ein Körper entlang einer Strecke  $s$  und wirkt dabei die Reibkraft  $F_R$ , so berechnet sich die Reibarbeit  $W_{Reib}$  mit:

$$W_{Reib} = -F_R \cdot s.$$

Bei der Hubarbeit leistet die Kraft Arbeit an dem Körper. Die im Körper gespeicherte Energie nimmt zu. Kraft und Weg besitzen die gleiche Orientierung (nach oben). Die Arbeit ist positiv.

Bei der Reibarbeit dagegen ist die Reibkraft stets so orientiert, dass sie der Bewegung entgegen wirkt. Kraft und Weg besitzen unterschiedliche Vorzeichen. Die Arbeit ist negativ. Dem Körper wird durch die Reibung Energie entzogen.

### 5.1.3 Leistung

Die Leistung  $P$  ist ein Maß dafür, wie viel Arbeit  $W$  pro Zeitspanne geleistet wird:

$$P = \frac{W}{t}.$$

Die **Einheit** der Leistung ist das Watt:  $W = \frac{J}{s} = \frac{N \cdot m}{s}$ .

Zum Merken:

*Leistung = Arbeit pro Zeit*



## 6 Das Prinzip der Virtuellen Verschiebung

Als *virtuelle Verschiebung* oder Verrückung  $\delta x$  bezeichnet man eine fiktive, infinitesimal kleine, beliebige aber zu den Randbedingungen konsistente Verschiebung. Sie beschreibt also eine zu den Randbedingungen verträgliche Gestalts- oder Lageänderung eines Systems. *Virtuelle Arbeit* bzw. virtuelle Energie  $\delta W$  ist diejenige Energie, die die eingepägten Kräfte an einem System bei einer virtuellen Verschiebung verrichten.

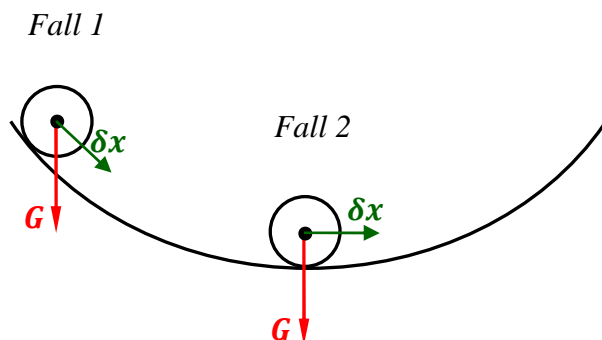
Das Prinzip der virtuellen Verschiebung (PVV) von Johann I Bernoulli besagt, dass im statischen Gleichgewicht die durch virtuelle Verschiebungen entstehende virtuelle Energie verschwindet. D.h. es gilt der Zusammenhang

$$\text{Gleichgewicht} \Leftrightarrow \delta W = 0.$$

Wir erhalten damit eine alternative zum statischen Kräftegleichgewicht.

### Beispiel 1

Wie nehmen an, die Kugel im Bild bleibe immer im Kontakt mit der Schüssel. Im ersten Fall befindet sich das System offensichtlich nicht in einem statischen Gleichgewicht. Daher gilt nach dem PVV für die virtuelle Energie  $\delta W \neq 0$ . Im zweiten Fall dagegen befindet sich das System in Ruhelage und es gilt  $\delta W = 0$ .



### Beispiel 2

Wir betrachten ein Seil in einer reibungsfreien und spielfreien Röhre. Es handelt sich also um ein System mit einem Freiheitsgrad. An beiden Enden des Seils sind Kräfte aufgebracht.



Wir betrachten nun virtuelle Verschiebungen  $\delta x_A$  und  $\delta x_B$  an den Seilenden. Da wir ein System mit Freiheitsgrad 1 haben, sind die beiden Größen nicht unabhängig voneinander. Vielmehr gilt  $\delta x_A = -\delta x_B$  und für die virtuelle Arbeit damit

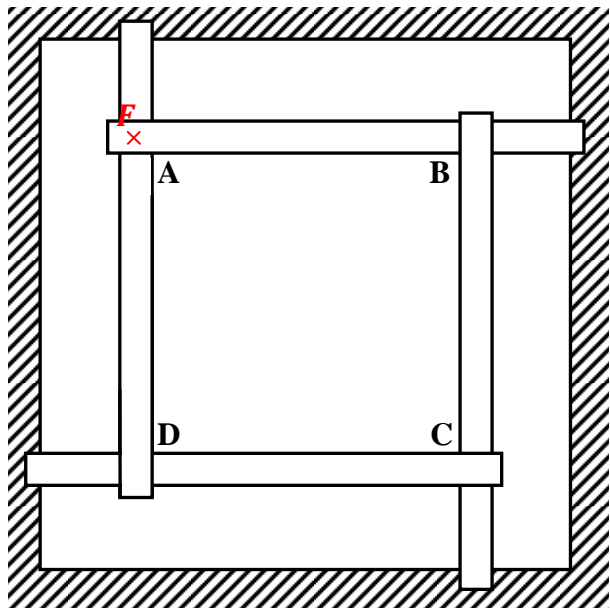
$$\delta W = \delta x_A \cdot F_A + \delta x_B \cdot F_B = \delta x_A \cdot F_A - \delta x_A \cdot F_B = 0.$$

Für die Lösung im Gleichgewicht gilt also  $F_A = F_B$ .

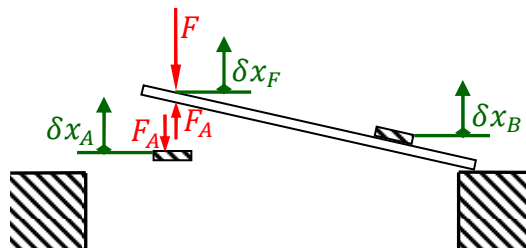
### Beispiel 3

Gegeben sei eine quadratische Baugrube mit Seitenlänge 5 m. Über die Baugrube sind vier Bohlen jeweils der Länge 4 m gelegt, sodass diese sich gegenseitig halten. An den Punkten A, B, C und D liegen jeweils zwei der Bohlen übereinander. Auf die Bohlen im Punkt A wirkt zusätzlich eine Last  $F$ .

Gesucht ist die Kontaktkraft  $F_A$  zwischen den Bohlen am Punkt A. Man kann diese Kraft sowohl per Freischneiden als auch mittels PVV ermitteln. Für dieses Beispiel ist letztere Methode allerdings um einiges geschickter.



Wir betrachten das System am Punkt A in der Seitenansicht.



Für die Berechnung der Kontaktkraft  $F_A$  mittels PVV betrachten wir diese wie äußere Kräfte. Außerdem wollen wir so tun, als hätte das System lediglich einen Freiheitsgrad. Damit ergibt sich für die virtuellen Verschiebungen nach dem Strahlensatz

$$\begin{aligned}\delta x_B &= \frac{1}{4} \delta x_F, \\ \delta x_C &= \frac{1}{4} \delta x_B = \frac{1}{16} \delta x_F, \\ \delta x_D &= \frac{1}{4} \delta x_C = \frac{1}{64} \delta x_F, \\ \delta x_A &= \frac{1}{4} \delta x_D = \frac{1}{256} \delta x_F,\end{aligned}$$

wobei für uns lediglich  $\delta x_A$  und  $\delta x_F$  von Interesse sind. Damit können wir nun leicht die virtuelle Arbeit  $\delta W$  berechnen, die sich als Summe über die verrichteten Arbeiten  $\delta x_i F_i$  ergibt. Es folgt also

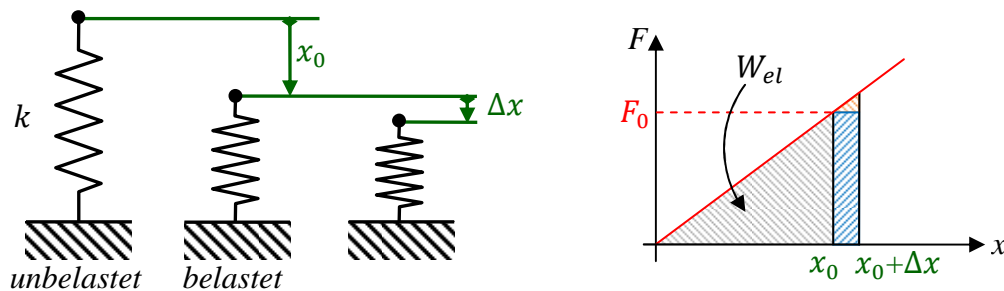
$$\delta W = (F_A - F) \delta x_F - F_A \delta x_A = 0.$$

Durch einsetzen von  $\delta x_A = \frac{1}{256} \delta x_F$  und Auflösen nach  $F_A$  erhalten wir

$$F_A = \frac{256}{255} F.$$

### Virtuelle Elastische Energie

Für elastische Energie, wie sie hier am Beispiel eines Federsystems auftritt, müsste man für eine weitere Verschiebung  $\Delta x$  zusätzliche Kraft  $\Delta F = k\Delta x$  aufwenden. Die notwendige Arbeit ist dann durch  $\Delta W = F_0\Delta x + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$  gegeben. Dies ist hier anschaulich an einem einfachen Federsystem dargestellt.



Für infinitesimal kleine virtuelle Verschiebungen  $\delta x$  betrachtet man zur Berechnung der virtuellen Energie lediglich den hier blau schraffierten Teil und erhält

$$\delta W = F \delta x.$$

## 7 Einführung in die Finite-Elemente-Methode

Die Finite-Elemente-Methode (FEM) ist ein Verfahren zur Näherungsweise Lösung von partiellen Differentialgleichungen (PDEs, Partial Differential Equations). In diesem Kapitel wollen wir zunächst die Differentialgleichung der Linearen Elastizität herleiten und in diskretisierter Form lösen. Im zweiten Teil des Kapitels werden wir den Hintergrund der FEM einführen und die Theorie kurz vorstellen.

### 7.1 Differentialgleichung der Linearen Elastizität

Der Impulssatz im Festkörper an einem infinitesimal kleinen Element in Navier-Cauchy Form lautet

$$G \left[ \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\operatorname{div} u) + \operatorname{div}(\nabla u) \right] = -f,$$

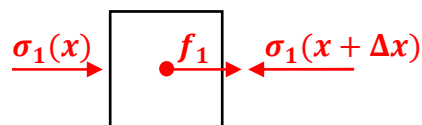
wobei

- $G$  das Schubmodul,
- $\nu$  die Querkontraktionszahl,
- $u$  den Vektor des Verschiebungsfeldes und
- $f$  den Vektor der Volumenkräfte (z.B.  $\text{N/m}^3$ )

bezeichnet. Die Divergenz  $\operatorname{div}$  einer Abbildung  $u = (u_1, u_2, u_3): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist definiert als

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

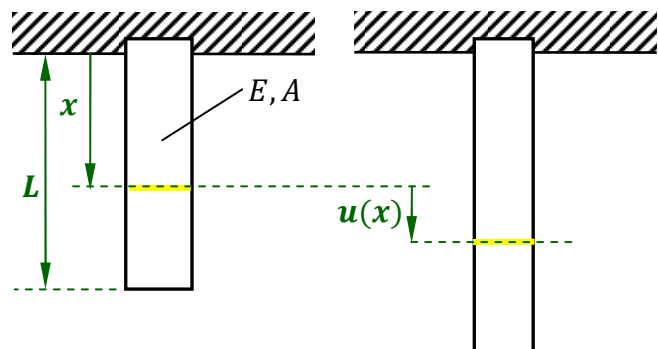
definiert also eine skalare Größe. Das Tensorfeld  $\nabla u$  ist dann komponentenweise definiert, liefert also eine Matrix mit den Zeilen  $\nabla u_1, \nabla u_2, \nabla u_3$  und die Divergenz im zweiten Teil der Formel wird dann auf die Vektoren in der Matrix angewendet, liefert also auch als Ergebnis einen Vektor zurück.



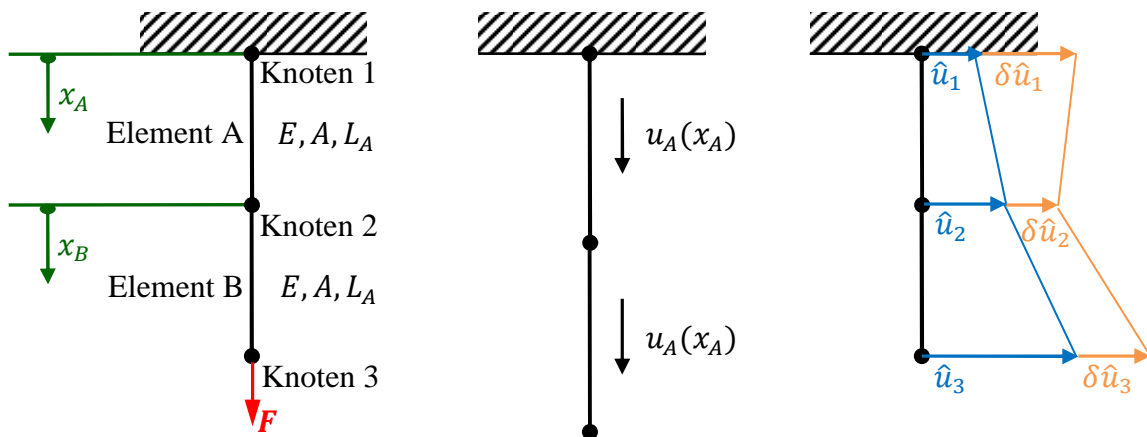
#### Einfaches (einachsiges) Beispiel eines Elastizitätsproblems

Gegeben sei ein Zugstab wie im Einführungsbeispiel und gesucht sei die Auslenkung  $u(x)$  im Zugstab. Die zugehörige Differentialgleichung lautet

$$EAu'' = 0.$$



### Schritt 1: Diskretisierung



### Schritt 2: Ansatzfunktion

Wir betrachten die linearen Ansatzfunktionen

$$u_A = \hat{u}_1 + (\hat{u}_2 - \hat{u}_1) \frac{x_A}{L_A},$$

$$u_B = \hat{u}_2 + (\hat{u}_3 - \hat{u}_2) \frac{x_B}{L_B}.$$

### Schritt 3: Prinzip der Virtuellen Verschiebung

Die virtuelle Arbeit setzt sich zusammen aus der virtuellen elastischen Arbeit (Normalkraft mal virtuelle Verschiebung) und der virtuellen äußeren Arbeit (äußere Kraft mal virtuelle Verschiebung):

$$\begin{aligned} \delta W &= N_A(\delta \hat{u}_2 - \delta \hat{u}_1) + N_A(\delta \hat{u}_3 - \delta \hat{u}_2) - F \delta \hat{u}_3 \\ &= \frac{EA}{L_A}(\hat{u}_2 - \hat{u}_1)(\delta \hat{u}_2 - \delta \hat{u}_1) + \frac{EA}{L_B}(\hat{u}_3 - \hat{u}_2)(\delta \hat{u}_3 - \delta \hat{u}_2) - F \delta \hat{u}_3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Durch Umformen erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta \hat{u}_1 \left( + \frac{EA}{L_A} \hat{u}_1 \quad - \frac{EA}{L_A} \hat{u}_2 \quad \right) \\ &+ \delta \hat{u}_2 \left( - \frac{EA}{L_A} \hat{u}_1 \quad + \frac{EA}{L_A} \hat{u}_2 \quad + \frac{EA}{L_B} \hat{u}_2 \quad - \frac{EA}{L_B} \hat{u}_3 \quad \right) \\ &+ \delta \hat{u}_3 \left( \quad \quad \quad - \frac{EA}{L_B} \hat{u}_2 \quad + \frac{EA}{L_B} \hat{u}_3 \quad - F \quad \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aus der Beliebigkeit (Unabhängigkeit) der  $\delta \hat{u}_i$  folgt die Schreibweise als lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \frac{EA}{L_A} & -\frac{EA}{L_A} & & \\ -\frac{EA}{L_A} & \frac{EA}{L_A} + \frac{EA}{L_B} & -\frac{EA}{L_B} & \\ & -\frac{EA}{L_B} & \frac{EA}{L_B} & \\ \underline{\underline{K}} & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{F}}.$$

Bisher haben wir die Randbedingungen vernachlässigt. Da die Verrückungen  $\delta \hat{u}_i$  mit den Randbedingungen übereinstimmen müssen folgt mit  $\hat{u}_i = 0$  also auch  $\delta \hat{u}_i = 0$  und die erste Spalte und erste Zeile der Steifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{K}}$  können gestrichen werden. Desweiteren führen wie die Bezeichnungen  $k_A = \frac{EA}{L_A}$  und  $k_B = \frac{EA}{L_B}$  ein womit sich das System vereinfacht zu

$$\begin{pmatrix} k_A + k_B & -k_B \\ -k_B & k_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_A} \\ \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \end{pmatrix} F.$$

Es ergeben sich nun die folgenden Dehnungen und Spannungen:

$$\varepsilon_A = \frac{\hat{u}_2 - \hat{u}_1}{L_A} = \frac{F}{EA}, \quad \varepsilon_B = \frac{\hat{u}_3 - \hat{u}_2}{L_B} = \frac{F}{EA},$$

$$\sigma_A = E \varepsilon_A = \frac{F}{A}, \quad \sigma_B = E \varepsilon_B = \frac{F}{A}.$$

## 7.2 Schwache Ableitungen

## 7.3 Variationsformulierungen und Galerkin-Verfahren

## 7.4 Die Finite-Elemente-Methode

## **8 Kontaktprobleme**

### **8.1 Lagrange-Methode**

### **8.2 Penalty-Methode**